

Ecole d'été CIMPA Damas 2004.
Méthodes géométriques pour les problèmes à
frontières libres.
(VERSION PROVISOIRE)

R. Monneau¹

Dimanche 23 mai 2004

¹CERMICS-ENPC, 6-8 avenue B. Pascal, Cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2, France

Chapitre 1

Introduction

1 Qu'est-ce qu'un problème à frontières libres ?

1.1 Rappel d'un problème classique bien posé

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n . On considère les solutions u du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, alors il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.

1.2 Un problème typique à frontière libre

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et une partition du bord $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$, où Γ est une partie inconnue du bord de Ω .

On cherche à résoudre le problème suivant : trouver à la fois la frontière libre Γ (et par conséquent Ω) et la fonction u définie sur Ω vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g_0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u = g & \text{sur } \Gamma \quad (\text{Dirichlet}) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{sur } \Gamma \quad (\text{Neumann}) \end{cases}$$

En général il n'y a pas de résultat d'existence, d'unicité et de régularité des solutions (Γ, u) .

2 Quelques exemples physiques de problèmes à frontières libres

2.1 Le problème de l'obstacle

Formulation faible

On considère un obstacle, c'est-à-dire une fonction ψ définie sur un ouvert borné régulier Ω de \mathbb{R}^n . On tend une membrane au-dessus de l'obstacle. Cette membrane est représentée par le graphe d'une fonction u définie sur Ω . On impose la contrainte :

$$\begin{cases} u = g > \psi & \text{sur } \partial\Omega \\ u \geq \psi & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

On cherche alors la solution u qui minimise l'énergie suivante sous la contrainte (2.1) :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + fu$$

Il est possible de montrer que cette minimisation fournit une solution faible du problème. La membrane a alors un contact tangent sur l'obstacle.

Formulation forte

Etant donnée une fonction u , on définit l'ensemble de coïncidence :

$$F = \{u = \psi\} \subset\subset \Omega$$

La frontière libre Γ est le bord de l'ensemble de coïncidence :

$$\Gamma = \partial F$$

Le problème consiste donc à trouver une fonction u définissant F et Γ telle que

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \setminus F \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \\ u = \psi & \text{sur } \Gamma = \partial F \quad (\text{Dirichlet}) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial n} & \text{sur } \Gamma = \partial F \quad (\text{Neumann}) \end{cases}$$

Cette formulation est forte car on suppose pour définir $\frac{\partial u}{\partial n}$, que la normale n à Γ est bien définie, c'est-à-dire que Γ est une frontière régulière.

2.2 Le problème de filtration

2.3 Le problème de Hele-Shaw

2.4 Le problème de Stefan (à une phase)

2.5 Options américaines

3 But du cours

Il est très difficile de travailler avec des solutions fortes pour les problèmes à frontières libres, car il n'existe pas en général de résultats directs d'existence de solutions fortes.

Nous allons donc définir des solutions faibles de problèmes à frontières libres, pour lesquelles l'existence (et l'unicité) est assurée. Puis nous allons développer une théorie de la régularité des frontières libres, pour montrer que les solutions sont aussi fortes que possible.

Nous renvoyons en particulier aux livres Kinderlehrer, Stampacchia [115], Friedman [81], Rodrigues [149].

Dans ce qui suit nous utiliserons en particulier les articles suivant Caffarelli [41], Weiss [168], Monneau [133].

Chapitre 2

Régularité de la solution du problème de l'obstacle

1 Le problème modèle

On cherche à minimiser

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + fu$$

pour

$$u \in K = \{u \in H^1(\Omega), \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad u \geq \psi \text{ sur } \Omega\}$$

Le résultat classique de minimisation de fonctionnelles strictement convexes, continues, infinies à l'infini, sur un convexe fermé K implique le

Theorème 1.1 *Si $K \neq \emptyset$, alors il existe un et un seul minimiseur.*

Remarque 1.2 *En général on ne peut espérer aucune régularité sur la frontière libre $\partial\{u = \psi\}$.*

Remarque 1.3 *Une hypothèse minimale pour obtenir de la régularité sur $\partial\{u = \psi\}$ est l'hypothèse de non dégénérescence :*

$$f - \Delta\psi \geq \delta_0 > 0$$

Dans la suite nous allons nous restreindre à l'étude du problème de l'obstacle modèle dans lequel on a

$$\psi \equiv 0, \quad f \equiv 1$$

Ainsi on s'intéresse à la minimisation :

$$\inf_{u \in K} E(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + u$$

où

$$u \in K = \{u \in H^1(\Omega), \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad u \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$$

avec

$$g > 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

2 Régularité de la solution

2.1 Rappels de quelques résultats classiques (I)

Théorème 2.1 *Si $u \in H^1(\Omega)$, alors $u^+(x) := \max(u(x), 0) \in H^1(\Omega)$ et*

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} 1_{\{u>0\}} \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

Schéma de la preuve du théorème 2.1.

Cf. Brezis [?]

Définition 2.2 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On dit que Ω est de classe C^k si son bord $\partial\Omega$ est localement le graphe d'une fonction C^k , ce qui est équivalent à dire que l'on peut écrire Ω sous la forme suivante :*

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi(x) < 0, \quad \text{où } \Phi \in C^k \\ \text{et } \nabla\Phi(x) \neq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \end{array} \right\}$$

Théorème 2.3 (Régularité elliptique, théorie L^p)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe C^2 . Soit $p \in (1, +\infty)$. Il existe $C = C(\Omega, n, p) > 0$ tel que si $g \in W^{2,p}(\Omega)$ et si $u \in H^1(\Omega)$ vérifie

$$u = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad \Delta u \in L^p(\Omega)$$

alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$ et

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C (\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)})$$

Théorème 2.4 (Injections de Sobolev)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe C^1 . Alors on a les injections continues suivantes :

i) Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^{p^}$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*

ii) Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q$ pour tout $q \in [1, +\infty)$.

iii) Si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ où $\alpha = 1 - \frac{n}{p} \in (0, 1)$.

Rappelons que

$$[u]_{\alpha;\Omega} = \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

et

$$|u|_{\alpha;\Omega} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{\alpha;\Omega}$$

Alors l'espace

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}), |u|_{\alpha;\Omega} < +\infty\}$$

est un Banach pour la norme $|\cdot|_{\alpha;\Omega}$.

2.2 Régularité de la solution et équation d'Euler-Lagrange

Proposition 2.5 *Si une fonction u minimise*

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + u$$

sur

$$K = \{u \in H_g^1(\Omega), \quad u \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$$

alors u minimise

$$E_+(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + u^+$$

sur

$$H_g^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega), \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Preuve de la proposition 2.5.

Soit $v \in H^1(\Omega)$, alors

$$E_+(v) = E(v^+) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v^-|^2 \tag{2.1}$$

où $v^- \geq 0$ est définie par $v = v^+ - v^-$. Ainsi

$$E_+(v) \geq E(v^+)$$

et cela implique que

$$\inf_{v \in H_g^1(\Omega)} E_+(v) \geq \inf_{v \in H_g^1(\Omega)} E(v^+) = \inf_{v \in K} E(v)$$

Or par ailleurs on a

$$\inf_{v \in H_g^1(\Omega)} E_+(v) \leq \inf_{v \in K} E_+(v) = \inf_{v \in K} E(v)$$

D'où

$$\inf_{v \in H_g^1(\Omega)} E_+(v) = \inf_{v \in K} E(v) \tag{2.2}$$

Ceci montre en particulier que tout minimiseur u de E sur K est aussi minimiseur de E_+ sur $H_g^1(\Omega)$.

Proposition 2.6 *On a*

$$1_{\{u>0\}} \leq \Delta u \leq 1 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega)$$

Preuve de la proposition 2.6.

Soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$, et $v = u + \varepsilon\phi$. Alors $E_+(v) \geq E_+(u)$, cad

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi + \zeta_{\varepsilon} \geq -\varepsilon \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2$$

où

$$\zeta_{\varepsilon} = \frac{(u + \varepsilon\phi)^+ - u^+}{\varepsilon} = \begin{cases} \phi & \text{si } u + \varepsilon\phi \geq 0 \\ -\frac{u^+}{\varepsilon} & \text{si } u + \varepsilon\phi \leq 0 \end{cases}$$

i) Pour $\phi \geq 0$, on a $\zeta_{\varepsilon} = \phi$ et donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi + \phi \\ &\leq \langle -\Delta u + 1, \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Ce qui signifie que

$$0 \leq -\Delta u + 1 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega)$$

ii) Pour $\phi \leq 0$, on a

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi + \phi \cdot 1_{\{u > -\varepsilon\phi\}} \geq -\varepsilon \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \int_{\Omega} \frac{u^+}{\varepsilon} 1_{\{u + \varepsilon\phi \leq 0\}}$$

On remarque que lorsque ε tend vers zéro, on a la convergence suivante

$$\phi \cdot 1_{\{u > -\varepsilon\phi\}} \longrightarrow \phi \cdot 1_{\{u > 0\}} \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

Ainsi, le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi + \phi \cdot 1_{\{u > 0\}} \geq 0$$

D'où

$$\langle -\Delta u + 1_{\{u > 0\}}, \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \geq 0$$

Ceci signifie que

$$-\Delta u + 1_{\{u > 0\}} \leq 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega)$$

Corollaire 2.7 $\Delta u \in L^{\infty}(\Omega)$ et $\|\Delta u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq 1$

Corollaire 2.8 *Si Ω est un ouvert borné de classe C^2 et $g \in C^2(\Omega)$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $p \in (1, +\infty)$, et $u \in C^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha \in (0, 1)$.*

Preuve du corollaire 2.8.

On remarque $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$ implique $\Delta u \in L^p(\Omega)$ pour tout $p \in (1, +\infty)$, car Ω est borné. En appliquant le théorème de régularité elliptique 2.3 on obtient la régularité $W^{2,p}(\Omega)$. Le théorème des injections de Sobolev 2.4 appliqué à u et ∇u donne $u, \nabla u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour $\alpha = 1 - \frac{n}{p} \in (0, 1)$.

Corollaire 2.9 (Equations d'Euler-Lagrange)

La solution u vérifie

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{dans } \{u > 0\} \cap \Omega \\ u \geq 0 & \text{sur } \Omega \\ \nabla u = 0 & \text{sur } \partial\{u = 0\} \subset\subset \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Remarque 2.10 On retrouve, sous une forme faible, la condition $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\{u = 0\}$.

Preuve du corollaire 2.9.

Puisque u est continue sur $\overline{\Omega}$, l'ensemble $\{u > 0\}$ est un ouvert.

- i) $\Delta u = 1$ dans $\{u > 0\}$ d'après la proposition 2.6.
- ii) $u \geq 0$ sur Ω , d'où $\nabla u = 0$ sur $\partial\{u = 0\}$ car $u \in C^1(\overline{\Omega})$.
- iii) $\Delta u = 0$ dans $\{u = 0\}^0$.

3 Régularité $W^{2,\infty}$ de la solution

3.1 Rappels de quelques résultats classiques (II)

Theorème 3.1 (Inégalité de Harnack)

Soit v solution de

$$\begin{cases} \Delta v = f & \text{sur } B_4 \subset \mathbb{R}^n \\ v \geq 0 & \text{sur } B_4 \end{cases}$$

Alors il existe une constante $C_H = C_H(n) > 0$ telle que

$$\sup_{B_1} v \leq C_H \left(\inf_{B_1} v + \|f^+\|_{L^n(B_4)} \right)$$

Preuve dans le cas $f = 0$.

Cette preuve est fondée sur la formule de la moyenne (cf. Gilbarg-Trudinger [?]) :

$$v(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} v$$

Ainsi soit $x_1, x_2 \in B_1(0)$. Alors

$$\begin{aligned}
v(x_1) &= \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x_1)} v \\
&\leq \frac{1}{|B_1|} \int_{B_3(x_2)} v \\
&= \frac{|B_3|}{|B_1|} \frac{1}{|B_3|} \int_{B_3(x_2)} v \\
&= \frac{|B_3|}{|B_1|} v(x_2) \\
&= 3^n v(x_2)
\end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{B_1} v \leq 3^n \inf_{B_1} v$$

ce qui termine la preuve du théorème dans le cas $f = 0$.

Theorème 3.2 (Estimations elliptiques intérieures)

Pour tout $\alpha \in (0, 1)$, il existe une constante $C = C(n, \alpha) > 0$, telle que si v vérifie

$$\Delta v = f \quad \text{dans } B_r(0)$$

alors

$$r^2 \|D^2 v\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} \leq C \left(\|v\|_{L^\infty(B_r)} + r^2 \|f\|_{L^\infty(B_r)} + r^{2+\alpha} [f]_{\alpha; B_r} \right)$$

Remarque 3.3 Pour $r = 1$, on a en fait

$$|v|_{2+\alpha; B_{\frac{1}{2}}} \leq C (\|v\|_{L^\infty(B_1)} + |f|_{\alpha; B_1})$$

3.2 La méthode de Alt et Phillips

Theorème 3.4

$$D^2 u \in L_{loc}^\infty(\Omega)$$

Preuve du théorème 3.4.

On sait déjà que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $u \geq c > 0$ sur $\partial\Omega$. Soit alors pour $\delta > 0$ suffisamment petit l'ouvert :

$$\omega_\delta = \{x \in \Omega, \quad 0 < \text{dist}(x, \{u = 0\}) < \delta\}$$

Rappelons que d'après la proposition 2.6 on a

$$\Delta u \leq 1 \quad \text{sur} \quad \Omega$$

Soit $y_0 \in \omega_\delta$. D'après l'inégalité de Harnack appliquée à la fonction $w(x) = u(y_0 + rx)$ qui vérifie $\Delta w \leq r^2$, on obtient

$$\sup_{B_1(0)} w \leq C_H \left(\inf_{B_1(0)} w + \|r^2\|_{L^n(B_4)} \right)$$

et donc

$$\sup_{B_r(y_0)} u \leq C_H \left(\inf_{B_r(y_0)} u + r^2 \|1\|_{L^n(B_4)} \right)$$

c'est-à-dire

$$\sup_{B_r(y_0)} u \leq C'_H \left(\inf_{B_r(y_0)} u + r^2 \right)$$

où $C'_H = C_H \|1\|_{L^n(B_4)}$. Maintenant soit

$$r = \sqrt{\frac{u(y_0)}{2C'_H}}$$

Alors

$$0 < u(y_0) \leq \sup_{B_r(y_0)} u \leq C'_H \inf_{B_r(y_0)} u + \frac{u(y_0)}{2}$$

D'où

$$\inf_{B_r(y_0)} u \geq \frac{u(y_0)}{2C'_H} = r^2 > 0$$

Ceci implique en particulier que

$$u > 0 \quad \text{sur} \quad B_r(y_0) \quad \text{pour} \quad r = \sqrt{\frac{u(y_0)}{2C'_H}}$$

et donc

$$\Delta u = 1 \quad \text{sur} \quad B_r(y_0)$$

D'après l'estimation elliptique intérieure (théorème 3.2) on a :

$$\begin{aligned} r^2 \|D^2 u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(y_0))} &\leq C_E (\|u\|_{L^\infty(B_r(y_0))} + r^2) \\ &\leq C_0 r^2 \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}\sup_{B_r(y_0)} u &\leq C'_H (\inf_{B_r(y_0)} u + r^2) \\ &\leq C'_H (u(y_0) + r^2) \\ &\leq C'_H (2C'_H r^2 + r^2) \\ &= C'_H (1 + 2C'_H) r^2\end{aligned}$$

d'où

$$\|D^2u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(y_0))} \leq C_0 = C_E(1 + C'_H(1 + 2C'_H))$$

En particulier $|D^2u(y_0)| \leq C_0$ dès que $B_{4r}(y_0) \subset \Omega$, or $r = \sqrt{\frac{u(y_0)}{2C'_H}}$. D'où ceci est vérifié dès que $\delta \leq \delta_0$. D'où

$$\|D^2u\|_{L^\infty(\omega_\delta)} \leq C_0$$

Fin de la preuve.

Remarque 3.5 *Par l'estimation intérieure on a $D^2u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$.*

Chapitre 3

Mesure de la frontière libre

1 Mesure de la frontière libre

1.1 Rappels de quelques résultats classiques (III)

Theorème 1.1 (Principe du maximum)

i) (faible). Si $v \in H^1(\Omega)$ et vérifie

$$\Delta v \geq 0 \quad \text{sur } \Omega$$

Alors

$$\max_{\Omega} v = \max_{\partial\Omega} v$$

ii) (fort) De plus si il existe $x_0 \in \Omega$ tel que

$$v(x_0) = \max_{\Omega} v$$

alors

$$v = \text{constante} = v(x_0)$$

Exercice : essayer de prouver le ii) à l'aide de l'inégalité de Harnack.

1.2 Lemme de non dégénérescence

Lemme 1.2 (Non dégénérescence)

Si $\Delta v \geq 1$ dans $\{v > 0\}$ et $x_0 \in \partial\{v > 0\}$, alors

$$\sup_{B_r(x_0)} v \geq \frac{r^2}{2n}$$

Preuve du lemme 1.2

Soit $w(x) = v(x) - \frac{1}{2n}|x - x_0|^2$. On a

$$\Delta w \geq 0 \quad \text{sur} \quad B_r(x_0) \cap \{v > 0\} = \omega$$

i) Soit $x_0 \in \{v > 0\}$. Alors $\max_{\omega} w \leq \max_{\partial\omega} w$. Or

$$\partial\omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

où

$$\Gamma_1 = ((\partial\{v > 0\}) \cap B_r(x_0)), \quad \Gamma_2 = ((\partial B_r(x_0)) \cap \{v > 0\})$$

Or on a

$$\begin{cases} \text{sur } \Gamma_1 : & w = -\frac{1}{2n}|x - x_0|^2 < 0 \\ \text{sur } \Gamma_2 : & w = v - \frac{r^2}{2n} \end{cases}$$

D'où

$$0 < v(x_0) = w(x_0) \leq \max_{\Gamma_2} \left(v - \frac{r^2}{2n} \right)$$

c'est-à-dire

$$\max_{\partial B_r(x_0)} v \geq \frac{r^2}{2n} + v(x_0)$$

ii) Par continuité, on obtient le même résultat pour $x_0 \in \partial\{v > 0\}$, ce qui termine la preuve du lemme.

1.3 Application à la mesure de la frontière libre

Théorème 1.3 *On a la mesure de Lebesgue :*

$$|\partial\{u = 0\}| = 0$$

Corollaire 1.4 *La solution du problème de l'obstacle vérifie*

$$\Delta u = 1_{\{u > 0\}} \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{1.1}$$

Preuve du corollaire 1.4.

On a $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$. Or

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1 \quad \text{sur} \quad \{u > 0\} \\ \Delta u &= 0 \quad \text{sur} \quad \{u = 0\}^0 \end{aligned}$$

Et

$$\Omega \setminus (\{u > 0\} \cup \{u = 0\}^0) = \partial\{u = 0\} = \partial\{u > 0\}$$

qui est de mesure nulle, d'où le résultat.

La preuve du théorème 1.3 est basée sur le

Lemme 1.5

$$\exists \delta, r_0 > 0, \quad \forall x_0 \in \partial \{u > 0\}, \quad \forall r \in (0, r_0),$$

$$\exists B_{\delta r}(y) \subset B_r(x_0), \quad u > 0 \quad \text{sur} \quad B_{\delta r}(y)$$

Preuve du lemme 1.5

On pose $x_0 = 0 \in \partial \{u > 0\}$. On a $u(0) = \nabla u(0) = 0$ et $\|D^2u\|_{L^\infty(B_{r_0}(0))} \leq C_0$, d'où en écrivant

$$\nabla_\xi u(y) = \nabla_\xi u(0) + |y| \int_0^1 D_{\xi, \frac{y}{|y|}}^2 u(ty) dt$$

on obtient

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{r_0}(0))} \leq C_0 r$$

Le lemme de non dégénérescence 1.2 prouve que

$$\forall r < r_0, \quad \exists y \in \partial B_{\frac{r}{2}}(0), \quad u(y) \geq \frac{1}{2n} \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{8n}$$

En particulier, si $x \in B_{\delta r}(y)$ on a

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |x - y| \|\nabla u\|_{L^\infty(B_{r_0}(0))} \\ &\leq (2\delta r) (C_0 r) \\ &= (2C_0\delta) r^2 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} u(x) &\geq u(y) - 2C_0\delta r^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{8n} - 2C_0\delta\right) r^2 > 0 \quad \text{si} \quad \delta < \frac{1}{16nC_0} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u > 0 \quad \text{sur} \quad B_{\delta r}(y)$$

Fin de la preuve.

Rappelons le résultat suivant :

Lemme 1.6 *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble mesurable, alors pour presque tout $x \in A$, on a*

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{|B_r(x) \cap A|}{|B_r|} = 1 = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{|B_r(x) \cap A|}{|B_r|}$$

Preuve du lemme 1.6

Admis, cf. Federer [?].

Preuve du théorème 1.3.

Si la mesure de Lebesgue de $\partial \{u = 0\}$ est non nulle, alors il existe au moins un point $x_0 \in \partial \{u = 0\}$ tel que

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \theta_r(x_0) = 1$$

où

$$\theta_r(x_0) = \frac{|B_r(x_0) \cap \partial \{u = 0\}|}{|B_r|}$$

Or d'après le lemme 1.6, il existe une boule $B_{\delta r}(y) \subset B_r(x_0) \cap \{u > 0\}$, d'où

$$|B_r(x_0) \cap \partial \{u = 0\}| \leq |B_r| - |B_{\delta r}|$$

c'est-à-dire

$$\theta_r(x_0) \leq 1 - \frac{|B_{\delta r}|}{|B_r|} = 1 - \delta^n$$

Contradiction.

Remarque 1.7 *En particulier la région $\{u > 0\}$ ne peut pas avoir de pointes en forme de cusp.*

Chapitre 4

Blow-up

1 Notion de blow-up

1.1 Rappel du théorème d'Ascoli (théorème de compacité)

Theorème 1.1 (Théorème d'Ascoli pour les fonctions höldériennes)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, et $\alpha \in (0, 1]$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant :

$$\|u_n\|_{\alpha; \Omega} \leq C_0 \quad (\text{estimation a priori})$$

Alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ et $u_\infty \in C^\alpha(\Omega)$, vérifiant

$$\|u_\infty\|_{\alpha; \Omega} \leq C_0$$

$$\|u_{n_k} - u_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Preuve du théorème 1.1.

Cf. Brezis [?].

1.2 Rappel du problème de l'obstacle sur Ω

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{sur } \{u > 0\} \\ u \geq 0 & \text{sur } \Omega \\ \|D^2 u\|_{L^\infty} \leq C_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

1.3 Changement d'échelle et blow-up

Définition 1.2 On appelle blow-up de u en X_0 la suite de fonctions $u_{X_0}^{\varepsilon_n}$ définies par :

$$u_{X_0}^{\varepsilon_n}(X) = \frac{u(X_0 + \varepsilon_n X)}{\varepsilon_n^2}$$

pour $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Lorsque cela permettra d'alléger les notations sans introduire d'ambiguïté, on notera simplement

$$\varepsilon = \varepsilon_n, \quad u^\varepsilon = u_{X_0}^{\varepsilon_n}$$

En particulier on a

$$D^2 u^\varepsilon(X) = (D^2 u)(X_0 + \varepsilon X)$$

d'où

$$\|D^2 u^\varepsilon\|_{L^\infty} = \|D^2 u\|_{L^\infty} \leq C_0$$

et u^ε vérifie (1.1) sur $\frac{\Omega - X_0}{\varepsilon}$. Si de plus $X_0 \in \partial\{u=0\}$, alors $u(X_0) = \nabla u(X_0) = 0$ donc

$$u^\varepsilon(0) = \nabla u^\varepsilon(0) = 0$$

Or si $Y = |Y|e$, et $e, \xi \in \mathbf{S}^{n-1}$, alors

$$\xi \cdot \nabla u^\varepsilon(Y) = \xi \cdot \nabla u^\varepsilon(0) + \int_0^{|Y|} dt D_{\xi, e}^2 u^\varepsilon(0 + te)$$

et

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(Y) &= u^\varepsilon(0) + \int_0^{|Y|} ds e \cdot \nabla u^\varepsilon(se) \\ &= 0 + \int_0^{|Y|} ds \int_0^s dt D_{e, e}^2 u^\varepsilon(0 + te) \end{aligned}$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \|D^2 u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_r(0))} \leq C_0 \\ \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_r(0))} \leq C_0 r \\ \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_r(0))} \leq C_0 \frac{r^2}{2} \\ \sup_{B_r(0)} u^\varepsilon \geq \frac{r^2}{2n} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Proposition 1.3 *Etant donné une solution u de (1.1) et un blow-up $u_{X_0}^{\varepsilon_n}$ vérifiant (1.2), on peut trouver une fonction $u_{X_0}^0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant (1.1) sur \mathbb{R}^n et (1.2), tel que $0 \in \partial \{u_{X_0}^0 = 0\}$, et une sous-suite $(u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}})_k$ telle que pour tout compact K de \mathbb{R}^n , on a*

$$\|u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}} - u_{X_0}^0\|_{C^1(K)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque 1.4 *La fonction $u_{X_0}^0$ est appelée une limite du blow-up $u_{X_0}^{\varepsilon_n}$. Cette limite n'est pas nécessairement unique : elle dépend a priori du choix de la sous-suite extraite.*

Preuve de la proposition 1.3

Etant donné un rayon $R > 0$ fixé, on a l'estimation (1.2) sur $B_R(0)$. D'après le théorème d'Ascoli, on peut trouver une fonction limite u^0 et une sous-suite convergent vers u^0 sur $B_R(0)$.

On peut faire le raisonnement avec une suite de rayons R croissant vers l'infini, et par un argument d'extraction diagonale, on peut montrer qu'il existe une sous-suite telle que

$$\forall R > 0, \quad \|u^{\varepsilon_{n_k}} - u^0\|_{C^1(\overline{B_R(0)})} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

En particulier u^0 satisfait (1.2), d'où $0 \in \partial \{u^0 = 0\}$. De plus u^0 satisfait (1.1) car $u^{\varepsilon_{n_k}}$ satisfait (1.1). La seule chose à vérifier est que

$$\Delta u^0 = 1 \quad \text{sur} \quad \{u^0 > 0\} \tag{1.3}$$

Preuve de (1.3)

Soit $Y_0 \in \{u^0 > 0\}$, donc $u^0(Y_0) > 0$. Ainsi, par continuité de u^0 , il existe $B_\delta(Y_0)$ telle que

$$u^0(Y) \geq \frac{1}{2}u^0(Y_0) > 0 \quad \text{sur} \quad B_\delta(Y_0)$$

Or $u^{\varepsilon_{n_k}}$ tend vers u^0 uniformément sur les compacts de \mathbb{R}^n . Ainsi

$$|u^{\varepsilon_{n_k}} - u^0| \leq \eta \quad \text{sur} \quad B_\delta(Y_0)$$

pour k assez grand. Avec le choix $\eta = \frac{u^0(Y_0)}{4}$, on obtient en particulier

$$u^{\varepsilon_{n_k}} \geq \eta > 0 \quad \text{sur} \quad B_\delta(Y_0)$$

D'où

$$\Delta u^{\varepsilon_{n_k}} = 1 \quad \text{sur} \quad B_\delta(Y_0)$$

Et par passage à la limite dans $\mathcal{D}'(B_\delta(Y_0))$, on a

$$\Delta u^0 = 1 \quad \text{sur} \quad B_\delta(Y_0)$$

Fin de preuve.

Chapitre 5

Formule de monotonie

1 Formule de monotonie

Théorème 1.1 (Formule de monotonie)

Soit u une solution du problème de l'obstacle sur Ω , et $X_0 \in \Omega$ tel que $B_{r_0}(X_0) \subset\subset \Omega$.

Soit

$$\Phi_{u, X_0}(r) := \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r(X_0)} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + u - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(X_0)} u^2$$

Alors $\Phi_{u, X_0} \in C^1((0, r_0])$ et

$$\frac{d}{dr} (\Phi_{u, X_0})(r) = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B_r(X_0)} \left| e_r \cdot \nabla \left(\frac{u(X)}{|X - X_0|^2} \right) \right|^2 \geq 0$$

où $e_r = \frac{X - X_0}{|X - X_0|}$. En particulier, l'application $r \mapsto \Phi_{u, X_0}(r)$ est croissante.

Preuve du théorème 1.1.

Posons $X_0 = 0$. Soit

$$\begin{cases} \Psi_u(r) = \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + u \\ u^\varepsilon(X) = \frac{u(\varepsilon X)}{\varepsilon^2} \end{cases}$$

Alors on a l'invariance par scaling

$$\Psi_{u^\varepsilon} \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) = \Psi_u(r)$$

Donc

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \Psi_{u^\varepsilon} \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right\}_{|\varepsilon=1} = 0$$

c'est-à-dire

$$-r \frac{d}{dr} (\Psi_u) + \frac{d}{d\varepsilon} \{ \Psi_{u^\varepsilon}(r) \}_{|\varepsilon=1} = 0$$

Or

$$\frac{d}{d\varepsilon} \{\Psi_{u^\varepsilon}(r)\}_{|\varepsilon=1} = \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} \nabla u \cdot \nabla U + U$$

où

$$U = \frac{d}{d\varepsilon}(u^\varepsilon)_{|\varepsilon=1} = X \cdot \nabla u - 2u$$

D'où

$$\frac{d}{dr}(\Psi_u)(r) = \frac{1}{r^{n+3}} \left\{ \int_{B_r} U(-\Delta u + 1) + \int_{\partial B_r} U \nabla u \cdot n \right\}$$

Or

$$U(-\Delta u + 1) \equiv 0$$

car

$$\begin{cases} -\Delta u + 1 = 0 & \text{si } u > 0 \\ U = 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

Ici toutes les dérivations sont justifiées car $D^2u \in L_{loc}^\infty(\Omega)$. D'où

$$\frac{d}{dr}(\Psi_u)(r) = \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} - 2u \right) \frac{\partial u}{\partial r}$$

Soit $w = \frac{u}{r^2}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= 2rw + r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \\ r \frac{\partial u}{\partial r} - 2u &= r^3 \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\Psi_u)(r) &= \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} r^3 \frac{\partial w}{\partial r} \left(2rw + r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ &= I + \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B_r} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 \end{aligned}$$

où on a

$$\begin{aligned}
I &:= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial(w^2)}{\partial r} \\
&= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\theta \in \partial B_1} r^{n-1} \frac{\partial(w^2(r, \theta))}{\partial r} \\
&= \frac{d}{dr} \left\{ \int_{\theta \in \partial B_1} w^2(r, \theta) \right\} \\
&= \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} w^2 \right\} \\
&= \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} u^2 \right\}
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d}{dr} \{ \Phi_{u,0}(r) \} = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B_r} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2$$

avec

$$\Phi_{u,0}(r) = \Psi_u(r) - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} u^2$$

Fin de preuve.

2 Application aux blow-up

Theorème 2.1 *Soit $X_0 \in \partial \{u > 0\}$ et $u_{X_0}^0$ une limite de blow-up en X_0 . Alors $u_{X_0}^0$ est homogène de degré 2, c'est-à-dire*

$$u_{X_0}^0(\lambda X) = \lambda^2 u_{X_0}^0(X) \quad \text{pour tout } \lambda > 0$$

et

$$\Phi_{u_{X_0}^0,0}(r) = \text{constante} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \Phi_{u, X_0}(\rho)$$

Preuve du théorème 2.1.

Soit

$$u_{X_0}^\varepsilon(X) = \frac{u(X_0 + \varepsilon X)}{\varepsilon^2}$$

Alors pour une sous-suite extraite on a convergence suivante dans $C_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$:

$$u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}} \longrightarrow u_{X_0}^0$$

et par conséquent à $r > 0$ fixé, on a

$$\Phi_{u_{X_0},0}^{\varepsilon_{n_k}}(r) \longrightarrow \Phi_{u_{X_0},0}^0(r)$$

Or d'après l'invariance d'échelle on a

$$\begin{aligned} \Phi_{u_{X_0},0}^{\varepsilon_{n_k}}(r) &= \Phi_{u,X_0}(\varepsilon_{n_k} r) \\ &\longrightarrow \text{constante} = \Phi_{u,X_0}(0^+) := \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \Phi_{u,X_0}(\rho) \end{aligned}$$

Ici la limite $\Phi_{u,X_0}(0^+)$ existe d'après la monotonie de $\rho \mapsto \Phi_{u,X_0}(\rho)$. De plus cette limite est finie car on a les bornes suivantes sur u :

$$\begin{cases} \|D^2 u\|_{L^\infty(B_r(X_0))} \leq C_0 \\ \|\nabla u\|_{L^\infty(B_r(X_0))} \leq C_0 r \\ \|u\|_{L^\infty(B_r(X_0))} \leq C_0 \frac{r^2}{2} \end{cases}$$

ce qui garantit que pour tout ρ on a

$$\Phi_{u,X_0}(\rho) \geq -C_1 > -\infty$$

D'où

$$\Phi_{u_{X_0},0}^0(r) = \text{constante} = \Phi_{u,X_0}(0^+)$$

Or

$$\frac{d}{dr} \left(\Phi_{u_{X_0},0}^0 \right) (r) = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B_r(0)} \left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_{X_0}^0(X)}{|X|^2} \right) \right|^2$$

D'où $\frac{u_{X_0}^0(X)}{|X|^2}$ ne dépend que de $\theta = \frac{X}{|X|}$, c'est-à-dire

$$u_{X_0}^0(X) = |X|^2 w \left(\frac{X}{|X|} \right)$$

Fin de preuve.

Corollaire 2.2 *L'ensemble $\{u_{X_0}^0 = 0\}$ est un cône.*

Chapitre 6

Classification des limites de blow-up

0.1 Rappel du théorème de Liouville

Théorème 0.3 *Soit v vérifiant*

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \\ \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \end{cases}$$

Alors $v = \text{constante}$.

Preuve du théorème 0.3.

Soit $m = \inf_{\mathbb{R}^n} v > -\infty$ et $w = v - m$. Ainsi

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \\ w \geq 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \\ \inf_{\mathbb{R}^n} w = 0 \end{cases}$$

Alors d'après l'inégalité d'Harnack on a

$$0 \leq \sup_{B_r} w \leq C_H \inf_{B_r} w$$

Or $\inf_{B_r} w \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$, d'où $\sup_{B_r} w \rightarrow 0$ et $\sup_{\mathbb{R}^n} w = 0$ ce qui implique que $w \equiv 0$, c'est-à-dire $v = m = \text{constante}$.

Corollaire 0.4 *Si la mesure de l'ensemble $\{u_{X_0}^0 = 0\}$ est nulle, alors il existe une matrice Q , de type $n \times n$ vérifiant $\text{trace}(Q) = 1$ et $Q \geq 0$, telle que*

$$u_{X_0}^0(X) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X$$

Preuve du corollaire 0.4.

On note $u^0 = u_{X_0}^0$. Puisque la mesure de Lebesgue de $\{u_{X_0}^0 = 0\}$ est nulle, on a

$$\Delta u^0 = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n$$

Soit $\xi, \zeta \in \mathbf{S}^{n-1}$, et $v = D_{\xi\zeta}^2 u^0$. Alors

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \\ \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \end{cases}$$

D'après le théorème de Liouville, on a $v = \text{constante}$. Soit maintenant $X \in \mathbb{R}^n$ et $\phi(t) = u^0(tX)$. Ainsi on a

$$\phi(t) = \phi(0) + t\phi'(0) + \int_0^t ds \int_0^s d\alpha \phi''(\alpha)$$

D'où une évaluation en $t = 1$ donne

$$\begin{aligned} u^0 &= 0 + 0 + \left(\int_0^1 ds \int_0^s d\alpha \right) D_{XX}^2 u^0 \\ &= \frac{1}{2} X \cdot (D^2 u^0) \cdot X \end{aligned}$$

Fin de preuve.

0.2 Classification en dimension 2

D'après le résultat d'homogénéité (théorème 2.1), toute limite de blow-up en dimension $n = 2$ s'écrit

$$u^0(X) = r^2 g(\theta), \quad \text{avec } r = |X|, \quad \theta = \frac{X}{|X|}$$

et rappelons que u^0 vérifie

$$\begin{cases} \Delta u^0 = 1_{\{u^0 > 0\}} & \text{sur } \mathbb{R}^2 \\ u^0 \geq 0 \\ u^0 \in C^1(\mathbb{R}^2), \quad \|D^2 u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C_0 \end{cases}$$

Or l'opérateur de Laplace en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Cela donne avec $\theta \in \mathbf{S}^1 = [0, 2\pi)$ périodique

$$\begin{cases} 4g(\theta) + g''(\theta) = 1_{\{g>0\}} & \text{sur } \mathbf{S}^1 \\ g \geq 0 \\ g \in C^1(\mathbf{S}^1), \quad \|g''\|_{L^\infty(\mathbf{S}^1)} \leq C_0 \end{cases}$$

Là où $g > 0$, les solutions explicites sont

$$g(\theta) = A \cos(2(\theta - \theta_0)) + \frac{1}{4}$$

Posons $\theta_0 = 0$, les autres solutions s'obtenant par translation en θ . Quitte à changer θ en $\theta + \frac{\pi}{2}$, on peut supposer que $A \geq 0$. On a alors trois cas.

Cas 1 : $0 \leq A < \frac{1}{4}$

Alors $g > 0$ sur \mathbf{S}^1 , cela fournit une solution.

Cas 2 : $A > \frac{1}{4}$

Alors $g > 0$ sur l'intervalle $(-\theta_1, \theta_1)$, avec $\theta_1 \in (0, \pi/2)$. D'où $g'(\theta_1) \neq 0$. Contradiction avec le fait que g est positive et C^1 . Il n'y a donc pas de solutions.

Cas 3 : $A = \frac{1}{4}$

Alors on a

$$g(\theta) = \frac{1}{4}(\cos(2\theta) + 1) = \frac{1}{2}(\cos^2(\theta)) \quad \text{là où } g > 0$$

Ainsi la fonction suivante est une solution

$$g_0(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos^2 \theta & \text{si } \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où, ou bien

$$g(\theta) = g_0(\theta)$$

ou bien

$$g(\theta) = g_0(\theta + \pi)$$

ce qui est la même solution à translation près, ou bien

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \cos^2 \theta$$

Conclusion

À translation près sur θ , i.e. à rotation près des fonctions, on trouve deux types de solutions :

$$u^0(X) = r^2 g_0(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} x_1^2 & \text{si } x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \end{cases}$$

où bien avec $0 \leq A \leq \frac{1}{4}$:

$$u^0(X) = A \cos(2\theta) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X$$

$$\text{où } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2A & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - 2A \end{pmatrix} \geq 0,$$

avec $\text{trace}(Q) = 1$.

0.3 Théorème général de classification des limites de blow-up

Lemme 0.5 Soit $\alpha = \alpha(n)$ la constante définie par

$$\alpha = \Phi_{u_1^0, 0}(r = 1)$$

où

$$u_1^0(X) = \begin{cases} \frac{1}{2} x_1^2 & \text{si } x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \end{cases}$$

Alors $\alpha > 0$

Plus généralement, utilisant des arguments de type principe du maximum, on peut établir le résultat suivant :

Théorème 0.6 (Théorème de type Liouville, classification des limites de blow-up)

Soit u une solution au problème de l'obstacle et $X_0 \in \{u > 0\}$. Soit

$$u_{X_0}^{\varepsilon_n}(X) = \frac{u(X_0 + \varepsilon_n X)}{\varepsilon_n^2}$$

avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Alors il existe au moins une sous-suite (ε_{n_k}) telle que la suite de fonctions $(u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}})$ converge (uniformément sur tous les compacts de \mathbb{R}^n) vers une limite $u_{X_0}^0$. Réciproquement, notons $u_{X_0}^0$ toute limite d'une sous-suite $(u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}})$ convergente. Alors ou bien

i) $\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_{u, X_0}(r) = \alpha > 0$

et il existe un vecteur unitaire ν (qui dépend a priori du choix de la sous-suite $(u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}})$) tel que

$$u_{X_0}^0(X) = \frac{1}{2} (\max(0, \langle X, \nu \rangle))^2$$

ou bien

ii) $\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_{u, X_0}(r) = 2\alpha > 0$

et il existe une matrice Q de type $n \times n$ symétrique, positive ou nulle, vérifiant $\text{trace}(Q) = 1$ (cette matrice Q dépend a priori du choix de la sous-suite $(u_{X_0}^{\varepsilon_{n_k}})$) tel que

$$u^0(X) = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X$$

Définition 0.7 Les points $X_0 \in \{u > 0\}$ de type i) sont appelés points réguliers de la frontière libre.

Les points $X_0 \in \{u > 0\}$ de type ii) sont appelés points singuliers de la frontière libre.

On écrit

$$\partial \{u = 0\} = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

où

$$\mathcal{R} = \{X_0 \in \partial \{u = 0\}, \Phi_{u, X_0}(0^+) = \alpha\}$$

$$\mathcal{S} = \{X_0 \in \partial \{u = 0\}, \Phi_{u, X_0}(0^+) = 2\alpha\}$$

Interprétation.

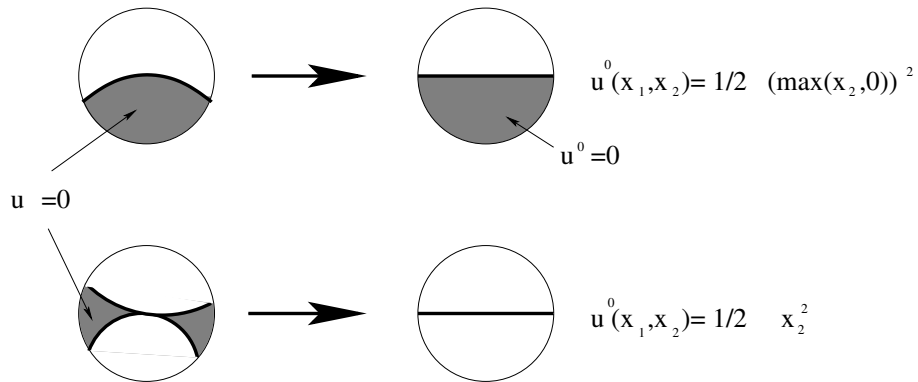


FIG. 6.1 – Limites de Blow-up

Proposition 0.8 \mathcal{S} est fermé.

Corollaire 0.9 \mathcal{R} est un ouvert de $\partial \{u = 0\}$, et \mathcal{S} est un fermé de $\partial \{u = 0\}$.

Preuve de la proposition 0.8.

Soit $X_0^n \in \mathcal{S}$ tel que $X_0^n \rightarrow X_0$. On veut prouver que $X_0 \in \mathcal{S}$. Si $X_0 \notin \mathcal{S}$, alors $X_0 \in \mathcal{R}$ et donc

$$\Phi_{u, X_0}(r) \rightarrow \alpha$$

lorsque r tend vers zéro. Soit $r_0 > 0$ tel que

$$\Phi_{u, X_0}(r_0) \leq \frac{3}{2}\alpha$$

Par ailleurs on a

$$\Phi_{u, X_0^n}(r_0) \geq \Phi_{u, X_0^n}(0^+) = 2\alpha$$

D'où par passage à la limite on tire

$$\Phi_{u, X_0}(r_0) \geq 2\alpha$$

Contradiction.

Chapitre 7

Etude des points singuliers

1 Une formule de monotonie pour les points singuliers

Rappelons que l'on écrit

$$\partial \{u = 0\} = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

où

$$\mathcal{R} = \{X_0 \in \partial \{u = 0\}, \Phi_{u, X_0}(0^+) = \alpha\}$$

$$\mathcal{S} = \{X_0 \in \partial \{u = 0\}, \Phi_{u, X_0}(0^+) = 2\alpha\}$$

Théorème 1.1 Soit $v = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q \cdot X \geq 0$ où Q est une matrice $n \times n$ symétrique vérifiant $\text{trace}(Q) = 1$. Si u est une solution du problème de l'obstacle et si $X_0 \in \mathcal{S}$ alors la fonction

$$\Psi_{u, X_0}^v(r) := \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(0)} (u(X_0 + \cdot) - v)^2 \quad \text{est croissante en } r$$

Remarque 1.2 Lorsque cela ne sera pas nécessaire, on omettra v dans l'expression $\Psi_{u, X_0}^v(r)$, en la notant simplement $\Psi_{u, X_0}(r)$.

Preuve du théorème 1.1.

On considère une fonction v vérifiant

$$\Phi_{v, 0}(r) = 2\alpha = \Phi_{u, X_0}(0^+)$$

Ceci est en particulier vérifié par la fonction v du théorème.

Soit alors

$$w = u(X_0 + \cdot) - v$$

Par intégration par partie on calcule

$$\begin{aligned}
& \Phi_{u, X_0}(r) - \Phi_{u, X_0}(0^+) \\
&= \Phi_{u, X_0}(r) - \Phi_{v, 0}(r) \\
&= \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + \nabla v \cdot \nabla w + w \\
&\quad - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 + 2vw \\
&= \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + w(1 - \Delta v) \\
&\quad - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 + \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} rw \, n \cdot \nabla v - 2vw \\
&= \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + w(1 - \Delta v) \\
&\quad - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 + \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w(X \cdot \nabla v - 2v) \\
&= \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} -\frac{1}{2} w \Delta w + w(1 - \Delta v) \\
&\quad + \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w(X \cdot \nabla v - 2v) + I
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
I &:= \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} \frac{1}{2} r w n \cdot \nabla w - w^2 \\
&= \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} \frac{1}{2} w r \frac{\partial w}{\partial r} - w^2 \\
&= \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w^2}{4} \right) - w^2 \\
&= \frac{1}{4r^{n-2}} \int_{\partial B_r} \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (w^2) - \frac{4}{r^5} w^2 \\
&= \frac{1}{4r^{n-2}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w^2}{r^4} \right) \\
&= \frac{r}{4} \left\{ \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w^2}{r^4} \right) \right\} \\
&= \frac{r}{4} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{w^2}{r^4} \right\} \\
&= \frac{r}{4} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 \right\}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 \right\} \\
&= \frac{4}{r} (\Phi_{u, X_0}(r) - \Phi_{u, X_0}(0^+)) \\
&\quad + \frac{2}{r^{n+3}} \int_{B_r} \{w \Delta w - 2w(1 - \Delta v)\} \\
&\quad - \frac{4}{r^{n+4}} \int_{\partial B_r} w(X \cdot \nabla v - 2v)
\end{aligned}$$

Or d'après la formule de monotonie on a

$$\Phi_{u, X_0}(r) - \Phi_{u, X_0}(0^+) \geq 0$$

et par ailleurs le v choisi dans le théorème est homogène de degré 2, donc

$$X \cdot \nabla v - 2v = 0$$

et vérifie

$$\Delta v = 1$$

On calcule alors (avec u qui signifie ici $u(X_0 + \cdot)$)

$$w\Delta w = (u - v)\Delta(u - v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u > 0 \\ v & \text{si } u = 0 \end{cases} \Bigg| \geq 0$$

D'où

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 \right\} \geq 0$$

Ceci termine la preuve du théorème.

Lemme 1.3 *Soit $u_{X_0}^0$ un blow-up limite de u en X_0 (celui-ci pouvant a priori dépendre de la sous-suite extraite). Alors on a*

$$\Psi_{u, X_0}^v(0^+) = \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(0)} (u_{X_0}^0 - v)^2$$

Preuve du lemme 1.3.

Remarquons que l'on a

$$\Psi_{u_{X_0}^{\varepsilon}, 0}(r) = \Psi_{u, X_0}(\varepsilon r)$$

Or pour une sous-suite extraite (ε'), on a la convergence en norme C^1 uniformément sur tous les compacts de $u_{X_0}^{\varepsilon'}$ vers $u_{X_0}^0$, donc à r fixé on a

$$\Psi_{u_{X_0}^{\varepsilon'}, 0}(r) \longrightarrow \Psi_{u_{X_0}^0, 0}(r)$$

Par ailleurs par la monotonie de Ψ_{u, X_0} , on a

$$\Psi_{u, X_0}(\varepsilon' r) \longrightarrow \Psi_{u, X_0}(0^+)$$

On en tire l'égalité

$$\Psi_{u, X_0}(0^+) = \Psi_{u_{X_0}^0, 0}(r)$$

pour tout $r > 0$, ce qui termine la preuve du lemme.

Corollaire 1.4 *Pour tout $X_0 \in \mathcal{S}$, il existe une unique matrice $n \times n$ symétrique Q_{X_0} , positive, vérifiant $\text{trace}(Q_{X_0}) = 1$ telle que la limite $u_{X_0}^0$ de tout blow-up $u_{X_0}^\varepsilon(X) = \frac{u(X_0 + \varepsilon X)}{\varepsilon^2}$, est unique et est donnée par*

$$u_{X_0}^0 = \frac{1}{2} {}^t X \cdot Q_{X_0} \cdot X$$

Preuve du corollaire 1.4.

Supposons qu'il existe deux limites possibles v^1, v^2 obtenues par blow-up, c'est-à-dire telles qu'il existe deux sous-suites (ε') et (ε'') telles que

$$u_{X_0}^{\varepsilon'} \longrightarrow v^1$$

et

$$u_{X_0}^{\varepsilon''} \longrightarrow v^2$$

On voit d'après le lemme 1.3 que

$$\frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(0)} (v^1 - v)^2 = \Psi_{u, X_0}^v(0^+) = \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(0)} (v^2 - v)^2$$

En faisant le choix $v = v^1$, on obtient le résultat.

2 Dépendance continue du blow-up limite

Rappelons que \mathcal{S} est fermé.

Proposition 2.1 *L'application*

$$\begin{aligned} Q : \mathcal{S} &\longrightarrow M_{n \times n} \\ X_0 &\longmapsto Q_{X_0} \end{aligned}$$

est continue.

Corollaire 2.2 *Il existe un module de continuité σ tel que*

$$\forall X_0, Y_0 \in \mathcal{S}, \quad |Q_{X_0} - Q_{Y_0}| \leq \sigma(|X_0 - Y_0|)$$

Preuve du corollaire 2.2.

Cela résulte de l'uniforme continuité sur les compacts.

Preuve de la proposition 2.1.

Soit $X_0^n \longrightarrow X_0$. Etant donné $\varepsilon > 0$, fixons $r > 0$ tel que

$$\Psi_{u, X_0}(r) \leq \Psi_{u, X_0}(0^+) + \varepsilon$$

Remarquons que à r fixé, on a

$$\Psi_{u, X_0^n}(0^+) \leq \Psi_{u, X_0^n}(r) \longrightarrow \Psi_{u, X_0}(r)$$

D'où

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \Psi_{u, X_0^n}(0^+) \leq \Psi_{u, X_0}(0^+) + \varepsilon$$

où ε est arbitraire, ce qui signifie que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \Psi_{u, X_0^n}(0^+) \leq \Psi_{u, X_0}(0^+)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{1}{2} X \cdot Q_{X_0^n} \cdot X - v \right)^2 \\ \leq \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{1}{2} X \cdot Q_{X_0} \cdot X - v \right)^2 \end{aligned}$$

Le choix $v = \frac{1}{2} X \cdot Q_{X_0} \cdot X$ implique

$$Q_{X_0^n} \longrightarrow Q_{X_0}$$

ce qui termine la preuve de la proposition.

Proposition 2.3 *Il existe un module de continuité σ tel que pour tout $X_0 \in \mathcal{S}$, pour tout $r > 0$, on a*

$$0 \leq \Psi_{u, X_0}^v(r) \leq \sigma^2(r) \quad \text{pour le choix } v = u_{X_0}^0$$

Preuve de la proposition 2.3.

Par contradiction.

Définition 2.4 *Soit pour $k = 0, \dots, n-1$*

$$\mathcal{S}_k = \{X_0 \in \mathcal{S}, \quad \dim \text{Ker } Q_{X_0} = k\}$$

Ainsi

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{S}_k$$

Proposition 2.5 *Pour chaque k , l'ensemble*

$$F_k = \bigcup_{j=k}^{n-1} \mathcal{S}_j$$

est fermé.

Preuve de la proposition 2.5.

Soit $X_0^n \in F_k$ avec $X_0^n \longrightarrow X_0 \in \mathcal{S}$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{X_0^n} = Q_{X_0}$$

D'où

$$k \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\dim \text{Ker } Q_{X_0^n}) \leq \dim \text{Ker } Q_{X_0}$$

Ceci prouve que $X_0 \in F_k$.

Proposition 2.6 *Il existe un module de continuité σ tel que pour tout $X_0, Y_0 \in \mathcal{S}_{n-1} = F_{n-1}$, on a*

$$\frac{\text{dist}(Y_0, X_0 + \text{Ker}(Q_{X_0}))}{|Y_0 - X_0|} \leq \sigma(|X_0 - Y_0|)$$

Preuve de la proposition 2.6.

Supposons qu'il existe une suite de points $X_0^n, Y_0^n \in \mathcal{S}_{n-1}$ tels que

$$\begin{cases} \frac{\text{dist}(Y_0^n, X_0^n + \text{Ker}(Q_{X_0^n}))}{|Y_0^n - X_0^n|} \geq \delta > 0 \\ |Y_0^n - X_0^n| \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que

$$X_0^n, Y_0^n \longrightarrow X_0 \in \mathcal{S}_{n-1}$$

et que (pour un choix judicieux du système de coordonnées)

$$\frac{1}{2} {}^t X \cdot Q_{X_0} \cdot X = \frac{1}{2} x_1^2$$

Soit alors

$$\varepsilon_n = |Y_0^n - X_0^n| \longrightarrow 0$$

et

$$\nu^n = \frac{Y_0^n - X_0^n}{|Y_0^n - X_0^n|} \longrightarrow S^{n-1}$$

où la convergence des ν^n a lieu encore une fois quitte à extraire une sous-suite. On considère alors le blow-up

$$u_{X_0^n}^{\varepsilon_n}$$

Le problème se réécrit ainsi :

$$\begin{cases} \text{dist}(\nu^n, \text{Ker}(Q_{X_0^n})) \geq \delta > 0 \\ u_{X_0^n}^{\varepsilon_n}(\nu^n) = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left(\Psi_{u_{X_0^n}, 0}^{u_{X_0}^0}(r) \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\Psi_{u, X_0^n}^{u_{X_0}^0}(\varepsilon_n r) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\Psi_{u, X_0^n}^{u_{X_0^n}^0}(\varepsilon_n r) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\Psi_{u_{X_0^n}, 0}^{u_{X_0}^0}(\varepsilon_n r) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sigma(\varepsilon_n r) + C\sigma(\varepsilon_n) \end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$u_{X_0^n}^{\varepsilon_n} \longrightarrow u_{X_0}^0$$

En utilisant le lemme (dont la preuve est laissée au lecteur)

Lemme 2.7 $\text{Ker } Q_{X_0^n} \longrightarrow \text{Ker } Q_{X_0}$

On obtient

$$\begin{cases} \text{dist}(\nu, \text{Ker}(Q_{X_0})) \geq \delta > 0 \\ u_{X_0}^0(\nu) = 0 \end{cases}$$

Le deuxième ligne implique que

$$\frac{1}{2}(\nu_1)^2 = 0$$

alors que la première ligne implique que $\nu_1 \neq 0$. Contradiction.

3 Description de l'ensemble singulier

3.1 Rappel du théorème d'extension de Whitney

Théorème 3.1 (Théorème d'extension de Whitney)

Soit A un compact de \mathbb{R}^m et deux applications

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$Tf : A \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$$

telles que

$$\limsup_{a, b \in A, |a-b| \rightarrow 0} |Tf(b) - Tf(a)| = 0$$

et

$$\limsup_{a, b \in A, |a-b| \rightarrow 0} \frac{f(b) - f(a) - Tf(a) \cdot (b-a)}{|b-a|} = 0$$

Alors il existe une application C^1 :

$$g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

telle que

$$g|_A = f, \quad (\nabla g)|_A = Tf$$

3.2 Application à l'étude de l'ensemble singulier

Proposition 3.2 Soit $X_0 \in \mathcal{S}_{n-1}$. Alors il existe un rayon $r_{X_0} > 0$ et un compact A de la $(n-1)$ -dimensionnelle boule $B_{r_{X_0}}(0) \subset \text{Ker } Q_{X_0} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$, et il existe une application

$$f : A \longrightarrow (\text{Ker } Q_{X_0})^\perp \simeq \mathbb{R}$$

tel que en définissant

$$\begin{aligned} \psi : A &\longrightarrow B_{r_{X_0}}(X_0) \subset \mathbb{R}^n \\ x' &\longmapsto \psi(x') = X_0 + (x', f(x')) \end{aligned}$$

on a

$$\mathcal{S}_{n-1} \cap B_{r_{X_0}}(X_0) = \psi(A)$$

Preuve de la proposition 3.2.

Cette proposition est un corollaire de la proposition 2.6, en définissant A par la projection orthogonale suivante :

$$A = \text{Proj}_{|\text{Ker } Q_{X_0}} (\mathcal{S}_{n-1} \cap B_{r_{X_0}}(X_0))$$

Proposition 3.3 On définit Tf sur A par

$$Tf(x') = \frac{n_{x'}}{n_y}$$

où

$$\begin{cases} n = (n_{x'}, n_y) \in \text{Ker } Q_{X_0} \times (\text{Ker } Q_{X_0})^\perp \\ |n| = 1 \\ \mathbb{R} \cdot n^\perp = \text{Ker } Q_{\psi(x')} \end{cases}$$

Alors (f, Tf) satisfait aux hypothèses du théorème 3.1 d'extension de Whitney sur A .

Preuve de la proposition 3.3.

Cette proposition est un corollaire de la proposition 2.6, en remarquant que $n = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(\nabla f, 1)$ lorsque f est régulier.

Corollaire 3.4 \mathcal{S}_{n-1} est contenu dans une hypersurface C^1 .

Remarque 3.5 *Une analyse similaire permet de montrer que les \mathcal{S}_k sont localement contenus dans des variétés C^1 de dimension k .*

Conclusion

La recherche de propriétés qualitatives sur l'ensemble des points singuliers se rencontre dans beaucoup d'autres domaines. Suivant les cas des techniques similaires peuvent s'appliquer ou pas. Citons en vrac :

- Les surfaces minimales
- Le problème de Mumford-Shah en traitement d'images
- Les problèmes à frontières libres à deux phases
- Le problème de l'obstacle d'évolution
- L'équation de la chaleur non linéaire
- Les équations de Navier-Stokes
- L'étude des singularités des systèmes elliptiques non linéaires
- etc.

Chapitre 8

Etude des points réguliers

1 Exemple de non unicité des limites de blow-up

On regarde le problème de l'obstacle (un peu plus général que précédemment) sur un ouvert Ω , pour une fonction f continue sur Ω :

$$\begin{cases} \Delta u = f \cdot 1_{\{u>0\}} \\ u \geq 0 \\ u \in C^1, \quad \|D^2u\|_{L^\infty} \leq C_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Contre-exemple

Il existe une fonction f continue, et une solution u de (1.1), et un point $X_0 \in \Omega$, régulier au sens de notre définition avec $f(X_0) = 1$, tel que les limites $u_{X_0}^0$ des blow-up $u_{X_0}^\varepsilon(X) = \frac{u(X_0+\varepsilon X)}{\varepsilon^2}$ ne sont pas uniques (cas d'une spirale infinie).

Cela montre que l'unicité des limites de blow-up est délicate (et peut dépendre de la régularité de f).

2 Unicité des limites de blow-up et conséquences

A notre connaissance, il n'y a pas de méthode générale et simple de preuve de l'unicité des limites de blow-up pour les points réguliers.

Néanmoins il est possible de prouver le résultat suivant :

Theorème 2.1 *Si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ pour un $\alpha \in (0, 1]$, et si X_0 est un point régulier d'une solution u de (1.1), alors la limite $u_{X_0}^0$ des blow-up $u_{X_0}^\varepsilon(X) = \frac{u(X_0+\varepsilon X)}{\varepsilon^2}$ est unique.*

Paçons-nous dans le cas où $f \equiv 1$

Ainsi on a

$$u_{X_0}^0 = \frac{1}{2} (\max(0, \langle X, \nu_{X_0} \rangle)^2)$$

où le vecteur unitaire ν_{X_0} ne dépend que du point X_0 (et non pas de la sous-suite extraite).

Il est alors possible d'en déduire (comme cela a été fait dans le cadre des points singuliers) :

Corollaire 2.2 *L'application*

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{R} &\longrightarrow \mathbf{S}^{n-1} \\ X_0 &\longmapsto \nu_{X_0} \end{aligned}$$

est continue.

Un raisonnement similaire à celui utilisant le théorème d'extension de Whitney dans le cadre des points singuliers, permet de déduire le résultat suivant :

Theorème 2.3 *La partie \mathcal{R} de la frontière libre est localement une hypersurface C^1 .*

Cela justifie en particulier la définition de l'ensemble \mathcal{R} des points réguliers.

3 Vers plus de régularité sur la frontière libre

On a le résultat suivant

Theorème 3.1 *Lorsque $f \equiv 1$, l'ensemble \mathcal{R} de la frontière libre est une hypersurface analytique.*

Idée de la démonstration

Supposons que la limite du blow-up en l'origine soit

$$u_0^0(x) = \frac{1}{2}(\max(0, x_1))^2$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n)$. Kinderlehrer, Nirenberg et Spruck ont introduit pour ce problème la transformation de l'Hodographe-Legendre :

$$u(x) \longmapsto v(y)$$

avec

$$\begin{cases} v(y) = u(x) - x_1 y_1 \\ y = (y_1, \dots, y_n) \text{ avec } y_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad y_i = x_i, \quad i = 2, \dots, n \end{cases}$$

Ainsi la frontière libre est envoyée localement sur l'ensemble $\{y_1 = 0\}$, et l'ensemble $\{u > 0\}$ localement sur $\{y_1 > 0\}$. Il est possible de traduire l'EDP sur u en une EDP sur v . La théorie de la régularités des solutions d'EDP elliptiques avec conditions sur le

bord $y_1 = 0$ s'applique et donne une certaine régularité sur la solution v .
On remarque par dérivation que

$$x_1 = -\frac{\partial v}{\partial y_1}$$

On conclut que l'équation de la frontière libre est

$$x_1 = -\frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1 = 0, x_2, \dots, x_n)$$

et donc la régularité de la frontière libre est celle de ∇v .

Bibliographie

- [1] ACERBI, E. ; FONSECA, I. ; FUSCO N. *Regularity Results for Equilibria in a Variational Model for Fracture*, Proc. Roy. Soc. Edimburgh Sect. A **127** (5), 889-902, (1997).
- [2] ALINHAC, S. ; GÉRARD, P., *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Interéditions / Editions du CNRS (1991).
- [3] ALT, H.W., *The fluid flow through porous media. Regularity of the free surface*, Manuscripta Math. **21**, 255-272, (1977).
- [4] ALT, H.W., *Strömungen durch inhomogene poröse Medien mit freiem Rand*, J. Reine Angew. Math. **305**, 89-115, (1979).
- [5] ALT, H.W. ; CAFFARELLI, L.A., *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*, J. Reine Angew. Math. **105**, 105-144, (1981).
- [6] ALT, H.W. ; CAFFARELLI, L.A. ; FRIEDMAN, A., *Axially symmetric jet flows*, Arch. Rat. Mech. Anal. **81**, 97-149, (1983).
- [7] ALT, H.W. ; CAFFARELLI, L.A. ; FRIEDMAN A., *The dam problem with two fluids*, Comm. Pure Appl. Math. **27**, 601-645, (1984).
- [8] ALT, H.W. ; CAFFARELLI, L.A. ; FRIEDMAN A., *Variational Problems with two phases and their free boundaries*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (2), 431-461, (1984).
- [9] ALT, H.W. ; GILARDI, G., *The behaviour of the free boundary for the dam problem*, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa **9**, 571-626, (1981).
- [10] ALT, H.W. ; PHILLIPS, D., *A free boundary problem for semilinear elliptic equations*, J. Reine Angew. Math. **368**, 63-107, (1986).
- [11] ALT, H.W. ; VAN DUIJN, C.J., *A stationary flow of fresh and salt groundwater in a coastal aquifer*, Nonlinear Anal. TMA **14** (8), 625-656, (1990).
- [12] ALT, H.W. ; VAN DUIJN, C.J., *A free boundary problem involving a cusp Part I : Global analysis*, European J. Appl. Math. **4**, 39-63, (1993).
- [13] ALT, H.W. ; VAN DUIJN, C.J., *A free boundary problem involving a cusp Part I : Local Analysis*, preprint.
- [14] ALT, H.W. ; VAN DUIJN, C.J., *A free boundary problem involving a cusp : Breakthrough of Saltwater*, preprint.
- [15] ATHANASOPOULOS, I. ; CAFFARELLI, L.A., *A Theorem of Real Analysis and its Applications to Free Boundary Problems*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (5), 499-502, (1985).
- [16] ATHANASOPOULOS, I. ; CAFFARELLI, L.A. ; SALSA, S., *Caloric functions in Lipschitz domains and the regularity of solutions to phase transition problems*, Ann. of Math. **143**, 413-434, (1996).
- [17] ATHANASOPOULOS, I. ; CAFFARELLI, L.A. ; SALSA, S., *Regularity of the free boundary in parabolic phase-transition problems*, Acta Math. **176**, 245-282, (1996).
- [18] ATHANASOPOULOS, I. ; CAFFARELLI, L.A. ; SALSA, S., *Phase Transition Problems of Parabolic Type : Flat Free Boundaries Are Smooth*, Comm. Pure Appl. Math. **51**, 77-112, (1998).

- [19] BADERKO, E.A., *Schauder estimates for oblique derivative problems*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **326**, 1377-1380, (1998).
- [20] BARENBLATT, G.I., *Fracture in solids as a free boundary problem*, Proceedings of Toledo, Conference on free boundary problems, Coll. Free boundary Problems : theory and application (Toledo, 1993), 20-39, Pitman Res. Notes Math. Ser. **323**. Publication : Longman Sci.Techn., Harlow, (1995).
- [21] BARLES, G. ; SOUGANIDIS, P.E. , *A New Approach to Front Propagation Problems : Theory and Applications*, preprint.
- [22] BECKNER, W. ; KENIG, C. ; PIPHER, J., in preparation.
- [23] BERESTYCKI, H. ; BONNET, A. ; VAN DUJIN, C.J., *The regularity of the free boundary between two fluids in a porous medium*, in preparation.
- [24] BERESTYCKI H. ; NIRENBERG L. ; VARADHAN S.R.S., *The Principle Eigenvalue and Maximum Principle for Second-Order Elliptic Operators in General Domains*, Comm. Pure Appl. Math. **47**, 47-92, (1994).
- [25] BLANK, I., *Sharp Results for the Regularity and Stability of the Free Boundary in the Obstacle Problem*, to appear in Indiana Univ. Math. J..
- [26] BLANK, I., communication personnelle.
- [27] BLAT, J. ; MOREL, J.-M., *Elliptic problems in image segmentation and their relation to fracture theory*, Proceedings of the Int. Conf. on nonlinear elliptic on parabolic problems, Nancy 88, Longman, (1989).
- [28] BONAMI, A. ; HILHORST, D. ; LOGAK, E., *Modified motion by mean curvature : local existence and uniqueness and qualitative properties*, prprint.
- [29] BONNET, A., *On the regularity of edges in image segmentation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13** (4), 485-528, (1996).
- [30] BONNET, A. ; KAMIN, S., *A stationary flow in a strip*, Nonlinear Anal. TMA **35** (6), 765-780, (1999).
- [31] BONNET A., MONNEAU R., *Distribution of vortices in a type II superconductor as a free boundary problem : Existence and regularity via Nash-Moser theory*, Interfaces and Free Boundaries **2**, 181-200 (2000).
- [32] BONNET A., MONNEAU R., *On the Mushy Region Arising Between Two Fluids in a Porous Medium*, Nonlinear Analysis, Real World and Applications, Vol. 5, Issue 1, (2004), 159-182.
- [33] BONORINO, L., *Regularity of the free boundary for some elliptic and parabolic problems*, NYU Dissertation, (1999).
- [34] BRAUNER, C.M. ; HULSHOF J. ; LUNARDI A., *A general approach to stability in free boundary problems*, preprint.
- [35] BRÉZIS, H. ; KINDERLEHRER, D., *The Smoothness of Solutions to Nonlinear Variational Inequalities*, Indiana Univ. Math. J. **23** (9), 831-844, (1974).
- [36] BREZIS, H. ; STAMPACCHIA, G., *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Soc. Math. France **96**, 153-180, (1968).
- [37] CABRÉ, X. ; CAFFARELLI, L.A., *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Colloquium Publications. Amer. Math. Soc. **43**, (1995).
- [38] CAFFARELLI, L.A., *Free boundary problems : a survey*, (1985).
- [39] CAFFARELLI, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (5), 541-545, (1986).
- [40] CAFFARELLI, L.A., *Free boundary problem in higher dimensions*, Acta Math. **139**, 155-184, (1977).

- [41] CAFFARELLI, L.A., *Compactness Methods in Free Boundary Problems*, Comm. Partial Differential Equations **5**(4), 427-448, (1980).
- [42] CAFFARELLI, L.A., *A remark on the Hausdorff measure of a free boundary, and the convergence of coincidence sets*, Boll. Un. Mat. Ital. A **18** (5), 109-113, (1981).
- [43] CAFFARELLI, L.A., *The Obstacle Problem revisited*, J. Fourier Anal. Appl. **4**, 383-402, (1998).
- [44] CAFFARELLI, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries, Part I : Lipschitz Free Boundaries are $C^{1,\alpha}$* , Rev. Mat. Iberoamericana **3** (2), 139-162, (1987).
- [45] CAFFARELLI, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries, Part II : Flat Free Boundaries are Lipschitz*, Comm. Pure Appl. Math. **42**, 55-78, (1989).
- [46] CAFFARELLI, L.A., *A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries, Part III : Existence Theory, Compactness, and Dependence on X* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **15** (4), 583-602, (1989).
- [47] CAFFARELLI, L.A.; FABES, E.; MORTOLA, M.; SALSA, S., *Boundary behavior of non negative solution of elliptic operators in divergence form*, Indiana Univ. Math. J. **30**, 621-640, (1981).
- [48] CAFFARELLI, L.A.; KENIG, C.E.; JERISON, D., *Some new monotonicity theorems with applications to free boundary problems*, preprint.
- [49] CAFFARELLI, L.A.; KINDERLEHRER, D., *Potential methods in variational inequalities*, J. Anal. Math. **37**, 285-295, (1980).
- [50] CAFFARELLI, L.A.; RIVIÈRE, N.M., *On the Rectifiability of Domains with Finite Perimeter*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **12**, 177-186, (1975).
- [51] CAFFARELLI, L.A.; RIVIÈRE, N.M., *Smoothness and Analyticity of Free Boundaries in Variational Inequalities*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **3** (4), 289-310, (1975).
- [52] CAFFARELLI, L.A.; RIVIÈRE, N.M., *Asymptotic behaviour of free boundaries at their singular points*, Ann. of Math. **106**, 309-317, (1977).
- [53] CAFFARELLI, L.A.; RIVIÈRE, N.M., *The smoothness of the elastic-plastic free boundary of a twisted bar*, Proc. Amer. Math. Soc. **63**(1), 56-58, (1977).
- [54] CAFFARELLI, L.A.; SALAZAR, J., *Solutions of fully nonlinear elliptic equations with patches of zero gradient : existence, regularity and convexity of level curves*, preprint.
- [55] CAFFARELLI, L.A.; SPRUCK, J., *Convexity properties of solutions to some classical variational problems*, Comm. Partial Differential Equations **7** (11), 1337-1379, (1982).
- [56] CARRILLO, J., *On the uniqueness of the solution of the evolution dam problem*, Nonlinear Anal. TMA, **22** (5), 573-607, (1994).
- [57] CARRILLO, J., *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems*, to appear.
- [58] CARILLO-MENENDEZ, J.; CHIPOT, M., *On the dam problem*, J. Differential Equations **45**, 234-270, (1982).
- [59] CARILLO-MENENDEZ, J.; CHIPOT, M., *Sur l'unicité de la solution du problème de l'écoulement à travers une digue*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **292**, 191-194, (1981).
- [60] CHAMBOLLE, A., *Finite-Differences Discretizations of the Mumford-Shah Functional*, preprint.
- [61] CHAPMAN, S.J., *Superheating Field of type-II superconductors*, SIAM J. Appl. Math. **55**, 1233-1258, (1995).
- [62] CHAPMAN, S.J.; RUBINSTEIN, J.; SCHATZMAN, M. *A Mean-field Model of Superconducting vortices*, European J. Appl. Math. **7**, 97-111, (1996).
- [63] CHIPOT, M., *Variational inequalities and flow in porous media*, Springer-Verlag 52, ed. (1982/1984).

- [64] CRAIG, W. ; STERNBERG, P., *Symmetry of free-surface flows*, Arch. Rational Mech. Anal. **118**, 1-36, (1992).
- [65] DAHLBERG, B.E.J., *Estimates of harmonic measure*, Arch. Rational Mech. Anal. **65**, 278-288, (1977).
- [66] DAVID, G., *C^1 arcs for minimizers of the Mumford-Shah functional*, SIAM J. Appl. Math. **56** (3), 783-888, (1996).
- [67] DERVIEUX, A., *A perturbation study of the obstacle problem by means of a generalized implicit function theorem*, Ann. Mat. Pura Appl. **127**, 321-364, (1981).
- [68] DE GENNES, P.G. *Superconductivity of Metals and Alloys*, New York and Amsterdam (1966).
- [69] DE GIORGI, E., *Free Discontinuity Problems in Calculus of Variations*, in Frontiers in pure and applied Mathematics, a collection of papers dedicated to J.-L. Lions on the occasion of his 60th birthday, R. Dautray ed., 55-61, North Holland, (1991).
- [70] DIAZ, J.I. ; KAWOHL, B., *On convexity and Starshapedness of level Sets for Some Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems on Convex Rings*, J. Math. Anal. Appl. **177**, 263-286, (1993).
- [71] DOLBEAULT, P., *Analyse complexe*, Collection Maîtrise de Mathématiques Pures, ed. Masson, (1990).
- [72] DOLBEAULT J., MONNEAU R., *Estimations de convexité pour des équations elliptiques non-linéaires et application à des problèmes de frontière libre*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **331**, 771-776, (2000).
- [73] DOLBEAULT J., MONNEAU R., *Convexity Estimates for Nonlinear Elliptic Equations and Application to Free Boundary Problems*, Ann. I.H. Poincaré, Analyse Non Linéaire, **19** (6), 903-926 (2002).
- [74] DOLBEAULT J., MONNEAU R., *On a Liouville type theorem for isotropic homogeneous fully nonlinear elliptic equations in dimension two*, Annali della Scuola Normale Superior di Pisa, Classe di Scienze (5) Vol. II (2003), pp. 181-197.
- [75] DOLBEAULT, J. ; POUPAUD, F., *A remark on the critical explosion parameter for a semilinear elliptic equation in a generic domain using an explosion time of an ordinary differential equation*, Nonlinear Anal. TMA **24** (8), 1149-1162, (1995).
- [76] DU, Q. ; GUNZBURGER, M.D. ; PETERSEN, J.S., *Analysis and Approximation of the Ginzburg-Landau model of superconductivity*, SIAM Rev. **34** (1), 54-81, (1992).
- [77] EVANS, L.C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics **19**, Amer. Math. Soc., (1998).
- [78] FALCONER, K.J., *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, (1985).
- [79] FEDERER, H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, (1969).
- [80] FREHSE J., *On the Regularity of the Solution of a Second Order Variational Inequality*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **6** (4), 312-315, (1972).
- [81] FRIEDMAN, A., *Variational Principles and Free Boundary Problems*, Pure and applied mathematics, ISSN 0079-8185, a Wiley-Interscience publication, (1982).
- [82] FRIEDMAN, A. ; PHILLIPS, D., *The free boundary of a semilinear elliptic equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **282**, 153-182, (1984).
- [83] FRIEDMAN, A. ; POZZI G.A., *The free boundary for elastic-plastic torsion problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **257** (2), 411-425, (1980).
- [84] FONSECA, I., *Interfacial energy and the Maxwell rule*, Arch. Rational Mech. Anal. **106** (1), 63-95, (1989).

- [85] FONSECA, I. ; FUSCO, N., *Regularity results for anisotropic image segmentation models*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **24** (3), 463-499 (1997).
- [86] FONSECA, I. ; FRANCFORT, G., *Relaxation in BV versus quasiconvexification in $W^{1,p}$; a model for the interaction between fracture and damage*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4**, 407-446, (1995).
- [87] GABRIEL, R., *A result concerning convex level surfaces of 3-dimensional harmonic functions*, J. London Math. Soc. **32**, 286-294, (1957).
- [88] GINZBURG, V.L. ; LANDAU, L.D., *On the theory of superconductivity*, Soviet Phys., J. Experiment. Theoret. Phys. **20**, 1064, (1950).
- [89] GIUSTI, E., *Minimal surfaces and functions of bounded variations*, Birkhäuser, Boston, (1984).
- [90] HAMEL F., MONNEAU R., *Existence and uniqueness for a free boundary problem arising in combustion theory*, Interfaces and Free Boundaries **4**, 167-210, (2002).
- [91] HAMILTON, R.S., *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. **7**, 65-222, (1982).
- [92] HENROT, A. ; SHAHGHOIAN, H., *Convexity of free boundaries with bernoulli type boundary conditions*, Nonlinear Anal. TMA **28** (5), (1997).
- [93] HENROT, A. ; SHAHGHOIAN, H., *Existence of classical solutions to a free boundary problem for the p -Laplace operator : (I) the exterior convex case*, preprint.
- [94] HENROT, A. ; SHAHGHOIAN, H., *Existence of classical solutions to a free boundary problem for the p -Laplace operator : (II) the interior convex case*, preprint.
- [95] ILMANEN, T., *Lectures on Mean Curvature Flow and Related equations*, Lecture Notes ICTP, Trieste, (1995).
- [96] ISAKOV, V., *Inverse theorems concerning the smoothness of potentials*, J. Differential Equations **11**, 50-56, (1976).
- [97] JERISON D. ; KENIG C., *Boundary behaviour of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. Math. **46** (1), 80-147, (1982).
- [98] KAUP, B. ; KAUP, L., *Holomorphic Functions of Several Variables*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (1983).
- [99] KAWOHL, B., *When are solutions to nonlinear elliptic boundary value problems convex ?*, Comm. Partial Differential Equations **10**, 1213-1225, (1985).
- [100] KAWOHL, B., *On the convexity and symmetry of solutions to an elliptic free boundary problem*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **42**, 57-68, (1987).
- [101] KAWOHL, B., *On the convexity of level sets for elliptic and parabolic exterior boundary value problems*, Potential theory (Prague, 1987), Plenum, New York-London, 153-159, (1988).
- [102] KAWOHL, B., *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE*, Lecture Notes in Math. **1150**, (1985).
- [103] KAWOHL, B., *Geometrical properties of level sets of solutions to elliptic problems*, Proc. Sympos. Pure Math. **45**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, 25-36, (1986).
- [104] KENIG, C.E., *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **83**. American Mathematical Society, (1994).
- [105] KENIG, C.E. ; TORO, T, *Harmonic measure on locally flat domains*, Duke Math. J. **87** (3), 509-551, (1997).
- [106] KENIG, C.E. ; TORO, T, *Harmonic measures and Poisson Kernels*, preprint.
- [107] KI-AHM LEE, *Obstacle problem for nonlinear second-order elliptic operator*, preprint.

- [108] KINDERLEHRER, D., *The Free Boundary Determined by the Solution to a Differential Equation*, Indiana Univ. Math. J. **25** (2), 195-208, (1976).
- [109] KINDERLEHRER, D., *The coincidence Set of Solutions of Certain Variational Inequalities*, Arch. Rational Mech. Anal. **40**, 231-250, (1971).
- [110] KINDERLEHRER, D., *How a minimal surface leaves an obstacle*, Acta. Math. **130**, 221-242, (1973).
- [111] KINDERLEHRER, D. ; NIRENBERG, L., *Regularity in free boundary problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **4**, 373-391, (1977).
- [112] KINDERLEHRER, D. ; NIRENBERG, L. ; SPRUCK, J., *Régularité dans les problèmes elliptiques à frontière libre*, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, **286**, 1187-1190, (1978).
- [113] KINDERLEHRER, D. ; NIRENBERG, L. ; SPRUCK, J., *Regularity in elliptic free boundary problems I*, J. Anal. Math. **34**, 86-119, (1978).
- [114] KINDERLEHRER, D. ; NIRENBERG, L. ; SPRUCK, J., *Regularity in elliptic free boundary problems II : Equations of higher order*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **4** (6), 637-683, (1979).
- [115] KINDERLEHRER, D. ; STAMPACCHIA G., *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York, (1980).
- [116] KINDERLEHRER, D. ; STAMPACCHIA G., *A free boundary problem in potential theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25**, 323-344, (1975).
- [117] KNOWLES, J.K., *A note on the energy release rate in quasi-static elastic crack propagation*, SIAM J. Appl. Math. **41**, 401-412, (1981).
- [118] LADYSHENSKAYA, O.A. ; URAL'TSEVA, N.N., *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, New York : Academic Press, (1968).
- [119] LAURENCE, P. ; STREDULINSKY, E., *Existence of Regular Solutions with Levels for Semilinear Elliptic Equations with Nonmonotone L^1 Nonlinearities*, Indiana Univ. Math. J. **39** (4), 1081-1114, (1990).
- [120] LEGER, J.C., *Flatness and Finiteness in the Mumford-Shah problem*, J. Math. Pures Appl. **78**, 431-459, (1999).
- [121] LITTMAN, W. ; STAMPACCHIA, G. ; WEINBERGER, H.F., *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **17** (3), 43-77, (1963).
- [122] LEWY, H., *On the reflection laws of second order differential equations in two independent variables*, Bull. Amer. math. Soc. **65**, 37-58, (1959)
- [123] LEWY, H., *On minimal Surfaces with Partially Free Boundary*, Comm. Pure Appl. Math. **4**, 1-13, (1951).
- [124] LEWY, H., *On a free boundary problem in two dimensions*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **34** (3), 325-336, (1986).
- [125] LEWY, H. ; STAMPACCHIA, G., *On the Regularity of the Solution of a Variational Inequality*, Comm. Pure Appl. Math. **22**, 153-188, (1969).
- [126] LEWY, H. ; STAMPACCHIA, G., *On the smoothness of superharmonics which solve a minimum problem*, J. Anal. Math. **23**, 227-236, (1970).
- [127] LEWY, H. ; ZHIYUAN, T., *On free boundary problems in two dimensions*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **34**, 325-336, (1985).
- [128] LIN, F.H., an unpublished course at Courant Institute of Mathematical Sciences, (1990).
- [129] MCNABB, A., *Strong Comparison Theorems for Elliptic Equations of Second Order*, J. of Math. and Mechanics **10** (3), 431-440, (1961).
- [130] MALLET-PARET, J., *Generic unfoldings and normal forms of some singularities arising in the obstacle problem*, Duke Math. J. **46** (3), 645-683, (1979).

- [131] MONNEAU R., *Problèmes de frontières libres, EDP elliptiques non linéaires et applications en combustion, supraconductivité et élasticité*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, (1999).
- [132] MONNEAU R., *A Brief Overview on the Obstacle Problem*, in Proceedings of the Third European Congress of Mathematics, Barcelona, (2000) : Progress in Mathematics. **202**, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, (2001).
- [133] MONNEAU R., *On the Number of Singularities for the Obstacle Problem in Two Dimensions*, Journal of Geometric Analysis, **13** (2), (2003), 359-389.
- [134] MONNEAU R., *On the Regularity of a Free Boundary for a Nonlinear Obstacle Problem Arising in Superconductor Modelling*, à paraître aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (2004).
- [135] MOREL, J.-M., *The Mumford-Shah conjecture in image processing*, Sem. N. Bourbaki, exposé 813, (1995/96).
- [136] MOREL, J.-M., SOLIMINI, S., *Variational methods in image segmentation*, Birkhäuser, Boston, (1994).
- [137] MOSER, J., *A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **47**, 1824-1831, (1961).
- [138] MOSER, J., *A rapidly convergent iteration method and non linear partial differential equations I*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **20**, 265-315, (1966).
- [139] MOSER, J., *A rapidly convergent iteration method and non linear partial differential equations II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **20**, 449-535, (1966).
- [140] NASH, J., *The imbedding problem for Riemann manifolds*, Ann. of Math. **63**, 20-63, (1956).
- [141] PHILLIPS, D., *A Minimization Problem and the Regularity of solutions in the Presence of a Free Boundary*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1), (1983).
- [142] PHILLIPS, D., *Hausdorff measure estimates of a free boundary for a minimum problem*, Comm. Partial Differential Equations **8** (13), 1409-1454, (1983).
- [143] PLOTNIKOV, P.I., *A variant of the Nash-Moser theorem*, Dinamika Sploshn. Sredy **162**, 97-107, (1978).
- [144] PROTER, M.H. ; WEINBERGER, H.F., *Maximum Principles in Differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1967).
- [145] REDONDO, J.C., *The penalized obstacle problem. I. Lipschitz regularity of level sets*, Duke Math. J. **69** (1), 43-65, (1993).
- [146] REDONDO, J.C., *The penalized obstacle problem. I. $C^{1,\alpha}$ regularity of level sets*, Duke Math. J. **69** (1), 67-85, (1993).
- [147] REIFENBERG, E.R., *An isoperimetric inequality related to the analyticity of minimal surfaces*, Ann. Math. **80**, 1-14, (1964).
- [148] REIFENBERG, E.R., *Solution of the Plateau Problem for m -dimensional surfaces of varying topological type*, Acta Math. **104**, 1-92, (1960).
- [149] RODRIGUES, J.F., *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, North-Holland, (1987).
- [150] RODRIGUES, J.-F. ; YI, F., *On a two-phase continuous casting Stefan problem with nonlinear flux*, European J. Appl. Math. **1**, 259-278, (1990).
- [151] RODRIGUES, J.-F. ; ZALTZMANN, B., *On classical solutions of the two-phase steady-state Stefan problem in strips*, Nonlinear Anal. TMA **19** (3), 207-208, (1992).
- [152] RODRIGUES, J.-F. ; ZALTZMANN, B., *Regular solutions of a Stefan problem in strips*, preprint, Universidade de Lisboa, (1994).

- [153] SANDIER, E. ; SERFATY, S., *A Rigorous Derivation of a Free-Boundary Problem Arising in Superconductivity*, preprint.
- [154] SCHAEFFER, D.G., *An Example of Generic Regularity for a Non-Linear Elliptic Equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **57**, 134-141, (1974).
- [155] SCHAEFFER, D.G., *A Stability Theorem for the Obstacle problem*, Adv. Math. **16**, 34-47, (1975).
- [156] SCHAEFFER, D.G., *Some Examples of Singularities in a Free Boundary*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **4** (4), 131-144, (1976).
- [157] SCHAEFFER, D.G., *The capacitor problem*, Indiana Univ. Math. J. **24**, 1143-1167, (1975).
- [158] SCHAEFFER, D.G., *One-sided Estimates for the Curvature of the Free Boundary in the Obstacle Problem*, Adv. Math. **24**, 78-98, (1977).
- [159] SCHWARTZ, J., *On Nash's implicit functional theorem*, Comm. Pure Appl. Math. **13**, 509-530, (1960).
- [160] SERGERAERT, F, *Une généralisation du théorème des fonctions implicites de Nash*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **270**, 861-863, (1970).
- [161] SERGERAERT, F, *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de fréchet et quelques applications*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., Ser. 5, **4**, 599-660, (1972).
- [162] SIMON, L., *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **3**, (1983).
- [163] SPRUCK, J., *Regularity in elliptic boundary problems*, Recent methods in non-linear analysis, Proc. int. Meet., Rome 1978, 73-81, (1979).
- [164] STOJANOVIC, S, *Perturbation formula for regular free boundaries in elliptic and parabolic obstacle problems*, SIAM J. Control Optim. **35** (6), 2086-2100, (1997).
- [165] TALENTI, G., *Some estimates of solutions to Monge-Ampère type equations in dimension two*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **8**, 183-230, (1981).
- [166] TORO, T., *Geometric conditions and existence of bi-Lipschitz parametrizations*, Duke Math. J. **77** (1), 193-227, (1995).
- [167] TORO, T., *Doubling and flatness : geometry of measures*, Notices Amer. Math. Soc. **44** (9), 1087-1094, (1997).
- [168] WEISS, G.S., *A homogeneity improvement approach to the obstacle problem*, Invent. Math. **138**, 23-50, (1999).
- [169] YI F. ; ZHANG J., *Classical existence of the flow of two immiscible fluids with equiviscosity in a two-dimensional porous medium*, SIAM J. Appl. Math. ??? ,??? (1997).
- [170] ZALTZMANN, B., *Multidimensional two-phase quasistationary Stefan problem*, Manuscripta Math. **78**, 287-301, (1993).
- [171] ZEHNDER, E., *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems, Part. I*, Comm. Pure Appl. Math. **28**, 91-140, (1975).