Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles Elliptiques

M. Jazar
Université Libanaise
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

26 octobre 2007

Table des matières

Chapitre 1

Opérateurs fermés et opérateurs m-dissipatifs

Dans ce chapitre nous commençons par les propriétés générales des opérateurs linéaires fermés et m-dissipatifs.

Dans ce chapitre H est un espace de Hilbert et X un espace de Banach.

1.1 Opérateurs fermés

Définition 1 *Soit $D \subset X$ un sous espace vectoriel. Un **opérateur linéaire non borné** est une application de D dans X.*

Remarque 1
1. *Un opérateur est un couple (A,D). D, noté parfois $D(A)$ ou D_A, est appelé **domaine de** A.*
2. *Changer le domaine peut changer considérablement l'opérateur. Voir les exemples ci-après.*
3. *Tous les opérateurs que nous allons considérer sont **densément définie**, i.e. tel que $\overline{D(A)} = X$.*
4. *Deux opérateurs (A,D_A) et (B,D_B) sont égaux si et seulement si $D_A = D_B$ et pour tout $x \in D_A$ on a $Ax = Bx$. On dit B est une extension de A, $A \subset B$, si $D_A \subset D_B$ et si pour tout $x \in D_A$ on a $Ax = Bx$.*
5. *L'appellation "borné", "non borné" sont dues au fait que pour les opérateurs linéaires, la continuité est équivalente à l'inégalité: $\|Ax\| \leq C\|x\|$ pour certaine $C > 0$ et tout $x \in X$, i.e. la bornitude sur la boule unité.*

Exemples.

1. Soient $X := BC^1(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées et continûment différentiable de dérivée bornée, $Y := BC(\mathbb{R})$ et $A := \frac{d}{dx}$. Il est clair que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ est un opérateur linéaire borné.
2. Soit $X_n := BC^n(\mathbb{R})$, pour tout $n \geq 1$. $A^n := (d/dx)^n$ est un opérateur linéaire borné de X_n dans X_{n-1}.
3. Soit $H := L^2(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^N)$ et l'on définie l'opérateur (A,D_A) avec $D_A := \{f \in C^2(\overline{\Omega});\ f_{|\partial\Omega} = 0\}$ and $A := \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est un opérateur linéaire non borné densément définie (puisque, par exemple, $\mathcal{D}(\Omega) \subset D_A$).

La notion d'opérateurs dont le graphe est fermé joue un rôle important:

Définition 2 *L'opérateur (A,D_A) est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset D_A$ telle que $x_n \to x \in X$ et $Ax_n \to y \in X$ alors $x \in D_A$ et $y = Ax$.*

Remarque 2

1. *(A,D_A) fermé est équivalent à $G(A) := \{(x,Ax);\ x \in D_A\}$ (le graphe de) est fermé dans $X \times X$.*
2. *Par linéarité cette définition est équivalente au suivant: pour tout $(x_n) \subset D_A$ tel que $x_n \to 0$ alors $Ax_n \to 0$.*
3. *La fermeture d'un opérateur (si elle existe) (A,D_A) est la plus petite extension fermée de A. On dit dans ce cas que A est fermable. Elle est notée $\bar{A}$. Il s'agit de l'opérateur dont le graphe est $\overline{G(A)}$.*
4. *Si $D \subset D_A$ est un sous espace on note par $A_{|D}$, appelé la part de A sur D, l'opérateur tel que $A_{|D} \subset A$ avec domaine $D(A_{|D}) = \{x \in D;\ Ax \in D\}$.*
5. *Par le théorème du graphe fermé, Si A est fermé et $D_A = X$ alors A est borné.*

Si un operator (A,D_A) est injectif, l'opérateur $A^{-1}\colon ImA \mapsto X$ est définie.

Définition 3 *Soit (A,D_A) un opérateur linéaire fermé sur X et $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que $\lambda \in \rho(A)$, l'ensemble résolvant de A, si $\lambda - A$ est une bijection de D_A dans $Im(\lambda - A) = X$ et son inverse est borné. On appelle spectre de A, $\sigma(A)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(A)$: $\rho(A) = \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$.*

Proposition 1 *L'inverse d'un opérateur injectif est fermé.*

Preuve. Soit $A\colon D_A \subset X \to Y$ un opérateur injectif, X et Y étant des espaces de Banach. Le graphe $G(A^{-1}) = \Phi(G(A))$ donc fermé, où $\Phi : E \times F \to F \times E$ est l'homéomorphisme $\Phi(x,y) = (y,x)$. □

Remarque 3 *1. Soit A un opérateur fermé sur X. Si $\lambda - A$ est bijectif de D_A dans X pour un certain λ alors $(\lambda - A)^{-1}$ est continue de $Im\lambda - A = X$ dans X car fermé (par la proposition précédente et le théorème du graphe fermé). Alors $\lambda \in \rho(A)$.*

2. Le spectre de A est réunion des trois ensembles disjoint suivants:

(a) $\sigma_p(A)$ le spectre ponctuel: l'ensemble de toutes les valeurs propres (donc $\lambda \in \sigma_p(A)$ veut dire que $\lambda - A$ est non injectif).

(b) Si $\lambda \in \sigma(A)\backslash\sigma_p(A)$ donc $\lambda - A$ est injectif mais non surjectif ($Im(\lambda - A) \neq X$). Deux cas se présentent:

- *Si $Im(\lambda - A)$ n'est pas dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre résiduel.*
- *Si $Im\lambda - A$ est dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre continue.*

Lemme 1 *Soit A un opérateur fermé et injectif et $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda \neq 0$. Alors $1/\lambda \in \rho(A^{-1})$ et*

$$(\lambda^{-1} - A^{-1})^{-1} = -\lambda A(\lambda - A)^{-1} = \lambda - \lambda^2(\lambda - A)^{-1}.$$

Preuve. $\lambda^{-1} - A^{-1} = -\lambda^{-1}(\lambda - A)A^{-1}$ (ont le même domaine ImA). Alors $\lambda^{-1} - A^{-1}$ est bijective de $D(A^{-1})$ sur X et son inverse est $-\lambda AR(\lambda,A)$. Mais $-AR(\lambda,A) + \lambda R(\lambda,A) = Id$, on obtient ainsi le résultat. □

Proposition 2 *Soit A un opérateur fermé. Alors*

1. *Le spectre $\sigma(A)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.*
2. *L'application $\lambda \in \rho(A) \longmapsto R(\lambda,A) \in \mathcal{L}(X)$ est analytique.*

Proof. Nous allons utiliser un résultat similaire pour les opérateurs bornés (voir par exemple [5, Theorem 2.1.1]).

Si $\sigma(A) = \mathbb{C}$ rien à démontrer. Sinon, en translatant A par un certain $\lambda \in \rho(A)$ on peut supposer que $0 \in \rho(A)$. Soit $B := A^{-1}$.

1. Par le lemme 1, $\sigma(A) = \{\lambda \neq 0;\ \lambda^{-1} \in \sigma(B)\}$ et puisque $\sigma(B)$ est compact, $\sigma(A)$ est fermé.

2. Par le lemme 1, $R(\lambda,A) = -\lambda^{-1}BR(\lambda^{-1},B)$, alors l'application $\lambda \longmapsto R(\lambda,A)$ est analytique sur $\rho(A)\backslash\{0\}$. Comme $\sigma(A)$ est fermé, il existe $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\lambda_0 \neq 0$. Par translation on voit que l'application $\lambda \longmapsto R(\lambda,A)$ est analytique sur $\rho(A)\backslash\{\lambda_0\}$. □

Remarque 4 *Pour tout fermé non vide S de $\mathbb{C}$ on peut construire un opérateur fermé dont le spectre est S:*
Puisque S est non vide, soit (λ_n) une suite dense dans S. On considère l'opérateur A sur $H := \ell^2(\mathbb{N})$, avec domaine l'ensemble des suites $(x_n) \in H$ tel que $(\lambda_n x_n) \in H$, et $A(x_n) = (\lambda_n x_n)$ (A est appelé opérateur de multiplication). Il n'est pas difficile de vérifier que A est fermé, densément définie, et $\sigma(A) = \sigma_p(A) = S$.

1.2 Opérateurs m-dissipatifs

Définition 4 *Un opérateur linéaire $(A,D(A))$ sur un espace de Banach est dit* **dissipatif** *si pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in D(A)$ on a $\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\|$.*

Voici quelques propriétés de ces opérateurs

Proposition 3 ***(Propriétés.)***
Soit $(A,D(A))$ un opérateur dissipatif. Alors

(i) Pour tout $\lambda > 0$, $\lambda - A$ est injectif et

$$\|(\lambda - A)^{-1}z\| \leq \frac{1}{\lambda}\|z\|,$$

pour tout $z \in Im(\lambda - A) = (\lambda - A)D(A)$.

(ii) $\lambda - A$ est surjective pour un certain λ si et seulement s'il est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Dans ce cas on a $]0,\infty[\subset \rho(A)$.

(iii) A est fermé si et seulement si $Im(\lambda - A)$ est fermé pour un certain (donc pour tout) $\lambda > 0$.

(iv) Si $Im(A) \subset \overline{D(A)}$, en particulier si A est densément défini, alors A est fermable. Sa fermeture $\overline{A}$ est aussi dissipative et vérifie $Im(\lambda - \overline{A}) = \overline{Im(\lambda - A)}$ pour tout $\lambda > 0$.

Preuve. (i) Direct.
(ii) Supposons que $(\mu - A)$ est surjectif pour un certain $\mu > 0$. D'aprés (i), $\mu \in \rho(A)$ et $\|R(\mu,A)\| \leq \frac{1}{\mu}$. Par le développement du résolvent en série, cela montre que $]0,2\mu[\subset \rho(A)$, et la dissipativité de A implique que $\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, pour tout $0 < \lambda < 2\mu$. De proche en proche on montre le point.
(iii) A est fermé si et seulement si $\lambda - A$ est fermé pour un certain (donc pour tout) $\lambda > 0$. Ceci est équivalent à $R(\lambda,A)\colon Im(\lambda - A) \longrightarrow D(A)$ est fermé, donc si et seulement si son domaine, i.e. $Im(\lambda - A)$ est fermé.
(iv) Soit (x_n) une suite de $D(A)$ tel que $x_n \to 0$ et $Ax_n \to y$. Pour tout $w \in D(A)$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$\|\lambda(\lambda - A)x_n + (\lambda - A)w\| \geq \lambda\|\lambda x_n + w\|.$$

Faisant tendre $n \to \infty$, on obtient $\| - \lambda y + (\lambda - A)w \geq \lambda \|w\|$, et donc $\| - y + w - \frac{1}{\lambda} Aw\| \geq \|w\|$. Faisant $\lambda \to \infty$, $\| - y + w\| \geq \|w\|$, on choisit $w \in D(A)$ arbitrairement proche de $y \in \overline{Im(A)}$, on obtient $y = 0$. Le reste peut être obtenu par calcul direct. $\square$

Il est clair que tout opérateur qui vérifie l'inégalité de Hille-Yosida est dissipatif. Le théorème suivant est une sorte de caractérisation:

Définition 5 *Un opérateur dissipatif* $(A,D(A))$ *tel que* $Im(\lambda - A)D(A) = X$ *pour un certain (donc pour tout)* $\lambda > 0$ *est dit m-dissipatif.*

Le résultat suivant donne une condition "simple" pour qu'un opérateur dissipatif soit m-dissipatif.

Proposition 4 *Soit* $(A,D(A))$ *un opérateur densement définie. Si* A *et* A^* *sont dissipatifs, alors la fermeture* $\overline{A}$ *de* A *est m-dissipatif.*

Preuve. Il faut montrer que $Im(\lambda - A)$ est dense dans X. Supposons le contraire, alors par le théorème de Hahn-Banach il existe $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in D(A)$, $< (I - A)x,x^* >= 0$. Alors $x^* \in D(A^*)$ et $< x,(I - A^*)x^* >= 0$ pour tout $x \in D(A)$. Par densité de $D(A)$, on obtient $(I - A^*)x^* = 0$ ce qui contredit la dissipativité de A^*. $\square$

Le cas hilbertien est très intéressant, d'autant plus que l'on peut donner une version "plus pratique" du théorème de Lumer-Philipps. On rappelle d'abord

Proposition 5 *Soit* H *un espace de Hilbert. Alors* $(A,D(A))$ *est dissipatif si et seulement si* $Re < Ax,x > \leq 0$ *pour tout* $x \in D(A)$.

Preuve. Si A est dissipatif, on a, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in D(A)$

$$-2\lambda < Ax,x > + \lambda^2 \|Ax\|^2 = \|x - \lambda Ax\|^2 - \|x\|^2 \geq 0.$$

En divisant par λ, puis $\lambda \to 0$, on obtient $< Ax,x > \leq 0$, pour tout $x \in D(A)$. Inversement, pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$

$$\|x - \lambda Ax\|^2 - \|x\|^2 = -2\lambda < Ax,x > + \lambda^2 \|Ax\|^2 \geq \|x\|^2$$

ce qui montre que A est dissipatif. $\square$

Définition 6 *Soit* A *un opérateur linéaire dans un espace de Hilbert* H*, de domaine dense. On dit que* A *est auto-adjoint (respectivement anti-adjoint) si* $A^* = A$ *(respectivement si* $A^* = -A$*).*

Proposition 6 *Soit A un opérateur auto-adjoint négatif dans un espace de Hilbert H. Alors A est m-dissipatif.*

Preuve. Comme A est négatif, A (et donc A^*) est dissipatif (5). En utilisant le corollaire 4, il suffit de voir que $G(A)$ est fermé, ce qui est vraie car $G(A) = G(A^*)$. □

Corollaire 1 *Soit A un opérateur linéaire densément défini dans un espace de Hilbert H tel que $G(A) \subset G(A^*)$. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A est auto-adjoint négatif*

Preuve. En appliquant la dernière proposition, il suffit de montrer que si A est m-dissipatif alors A est auto-adjoint. Soit $(x,y) \in G(A^*)$ et soit $z := x - A^*x = x - y$. Puisque A est m-dissipatif, il existe $v \in D(A)$ tel que $z = v - Av$ et puisque $G(A) \subset G(A^*)$, on a $v \in D(A^*)$ et $z = v - A^*v$. Donc $(I - A^*)(v - u) = 0$. Or A^* est dissipatif, par 3(i), $v - u = 0$. $A = A^*$. □

1.3 Exercices

Le Laplacien dans un ouvert de $\mathbb{R}^N$: Théorie L^2 et théorie C_0.

Théorie L^2: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $X = L^2(\Omega)$ considéré comme espace de Hilbert réel. On définit l'opérateur A sur X par

$$D(A) := \{u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$
$$Au = \Delta u, \qquad u \in D(A).$$

Alors on a

Proposition 7 $(A,D(A))$ *est m-dissipatif de domain dense. De plus A est auto-adjoint négatif.*

Remarque 5 *Si la frontière de Ω est bornée et de classe C^2, alors $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ avec normes équivalentes (voir [1, théorème IX 25])*

Théorie C_0: Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $Y = L^\infty(\Omega)$. On définit l'opérateur B sur Y par

$$D(B) := \{u \in H_0^1(\Omega) \cap Y, \Delta u \in L^\infty(\Omega)\},$$
$$Bu = \Delta u, \qquad u \in D(B).$$

Alors on a
Proposition 8 $(B,D(B))$ *est m-dissipatif dans $L^\infty(\Omega)$.*

Lemme 2 *(voir [3, Théorème 8.30]) Si la frontière de Ω est Lipschitzienne, on a $D(B) \subset C_0(\Omega) := \{u \in C(\overline{\Omega}), u = 0,$ sur $\partial\Omega\}$.*

Ce lemme nécessite des changements...

Chapitre 2

Semi groupes et problèmes de Cauchy

Comment résoudre un problème de Cauchy associé à une équation différential (EDO ou EDO) de la forme

$$\begin{cases} u' = Au & t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Si A est un nombre ou bien une matrice, alors la solution est sous la forme

$$u(t) = e^{tA}u_0.$$

La forme de cette solution dépend certainement de la possiblité de définir la fonction exponentielle: Dans les deux cas ci dessus, même si A est un opérateur linéaire borné, e^{tA} est définie par une série:

$$e^A := \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}.$$

Mais quel sens donner à e^{tA} si A est un opérateur linéaire non borné? Est ce que tout opérateur admet une exponentielle? On va essayer dans ce chapitre de répondre à ces questions.

Comme références concernant ce chapitre on peut consulter [1,2,4,5,6,8 et 10]

Dans tout ce chapitre, et sauf mention du contraire, X est un espace de Banach, et A un opérateur linéaire non borné.

2.1 C_0-semi-groupe

2.1.1. Definition. Une famille $(G(t))_{t\geq 0}$, d'opérateurs linéaires bornés sur X, est dite **semi-groupe fortement continue** ou bien C_0**-semi-groupe**, si elle vérifie:

1. $G(t+s) = G(t)G(s) = G(s)G(t)$, $t,s \geq 0$,

2. $G(0) = I$,
3. Pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{array}{rcl} [0,\infty[& \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & G(t)x \end{array}$$

   est continue.

2.1.2. Remarques:

1. La première propriété est la propriété exponenetielle.
2. En utilisant 1, il est façile de montrer que la condition 3 est équivalente à la continuité en zéro. D'où l'appellation C_0-semi-groupe.
3. Si A est un opérateur borné, on a alors l'uniforme continuité: La fonction

$$\begin{array}{rcl} [0,\infty[& \longrightarrow & \mathcal{L}(X) \\ t & \longmapsto & G(t) \end{array}$$

   est continue. On peut même prouver qu'il y a équivalence (en appliquant le théorème de graph fermé et le théorème 1.8).

2.1.3. Lemme. *Soit $w : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée sur tout interval borné et sous-additive (i.e. $w(t+s) \leq w(t) + w(s)$). Alors*

$$\inf_{t>0} \frac{w(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t}.$$

Preuve. Notons d'abord que les deux membres de l'égalité peuvent être $-\infty$. Soit $w_0 := \inf_{t>0} \frac{w(t)}{t}$ et soit $\gamma > w_0$. Il existe alors $t_0 > 0$ avec $w(t_0)/t_0 < \gamma$. For $t \geq 0$, ils existent $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < t_0$, tels que $w(t)/t \leq (nw(t_0)+w(r))/t$. Lorsque $t \to \infty$, $n/t \to 1/t_0$ et $w(r)/t \leq \sup_{s\in[0,t_0[} w(s)/t$, alors

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t} \leq \frac{w(t_0)}{t_0} \leq \gamma.$$

□

2.1.4. Proposition. *Soit $(G(t))$ un C_0-semi-groupe. Alors la limite*

$$w_0 := \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|G(t)\|}{t}$$

existe (ou bien $-\infty$). En addition pour tout $\gamma > w_0$, il existe une conctante $M_\gamma > 0$ tel que $\|G(t) \leq M_\gamma e^{\gamma t}$. Ce nombre, w_0, est appelé le **type** *du semi-groupe.*

Preuve. De la propriété exponentielle, on voit que la fonction $\log \|G(t)\|$ est sous-additive. De plus, comme $t \longmapsto G(t)x$ est fortement continue, elle est bornée sur tout intervalle bornée, et par le théorème de Banach-Steinhauss, $\|G(t)\|$ est bornée sur tout intervalle. Par le lemme précédent, w_0 existe et est l'inf. Pour tout $\gamma > w_0$, il existe t_0 tel que $\log \|G(t)\|/t < \gamma$ pour tout $t \geq t_0$, i.e. $\|G(t)\| \leq e^{\gamma t}$. Prendre alors

$$M_\gamma := \max(1, \sup_{t\in[0,t_0]\|G(t)\|} e^{-\gamma t}).$$

$\square$

2.1.5. Exemple. (semi-groupe Shift) Soit $X = L^2(0{,}1)$ et soit

$$[G(t)u]\,(x) = \begin{cases} u(x+t) & \text{si } x+t<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $G(t) = 0$, pour $t \geq 1$. Le type est $-\infty$.

2.1.6. Definition. Le générateur $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ d'un C_0-semi-groupe $(G(t))$ est l'opérateur

$$Ax := \lim_{t\downarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t}$$

définie pour tout x dans son domain

$$D(A) := \{x \in X \mid \text{ la limite existe}\}.$$

2.1.7. Remarques:

1. Ax n'est autre que la dérivée en zéro de la fonction continue $t \longmapsto G(t)x$.
2. Cette définition est valable pour les cas où A est borné.
3. Il n'est pas clair que $D(A)$ ne soit pas trivial. On va voir plus tard qu'en fait c'est un sous-espace dense de X.

2.1.8. Lemme. *Soit $(A{,}D(A))$ le générateur d'un C_0-semi-groupe $(G(t))$. Alors*

1. *$A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ is a linear operator.*
2. *Pour $x \in X$,*
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x\,ds = G(t)x.$$
3. *Si $x \in D(A)$ et $t > 0$, alors $G(t)x \in D(A)$ et*
$$\frac{d}{dt}\,(G(t)x) = AG(t)x = G(t)Ax.$$
4. *Pour tout $x \in X$ and tout $t > 0$, $\int_0^t G(s)x\,ds \in D(A)$ et*
$$A\left(\int_0^t G(s)x\,ds\right) = G(t)x - x.$$

5. *Pour tout $x \in D(A)$ et tous $s,t > 0$,*

$$G(t)x - G(s)x = \int_s^t G(\tau)Axd\tau = \int_s^t AG(\tau)xd\tau.$$

Preuve. 1. est trivial.
2. Calcul direct en utilisant la continuité de $t \longmapsto G(t)x$.
3. Soit $x \in D(A)$ et $h > 0$, on a

$$\frac{G(t+h)x - G(t)x}{h} = \frac{G(h) - I}{h}G(t)x = G(t)\frac{G(h)x - x}{h},$$

et

$$\frac{G(t)x - G(t-h)x}{h} = G(t-h)\frac{G(h)x - x}{h}.$$

Il suffit de faire tendre $h \to 0^+$.
4. Soit $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h}\int_0^t G(s)x\,ds &= \frac{1}{h}\int_0^t (G(s+h) - G(s))x\,ds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h G(s)x\,ds. \end{aligned}$$

En utilisant 2, la limite est $G(t)x - x$.
5. Direct. □

2.1.9. Théorème. *Le générateur d'un C_0-semi-groupe est un opérateur fermé densement définie qui détermine le semi-groupe d'une façon unique.*
Preuve. D'aprés 2.8.2, $x = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h G(s)x\,ds$, ce qui prouve la densité du domaine. Soit maintenant $(x_n) \subset D(A)$, $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$. Alors, par 2.1.8.5, $G(h)x_n - x_n = \int_0^h G(s)Ax_n\,ds$. Par passage à la limite on obtient

$$G(h)x - x = \int_0^h G(s)y\,ds.$$

On divise par h, puis faire tendre $h \to 0^+$. □

2.1.10. Exemples (Shift semigroup).

1. Soient $X = L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ et $(G(t)f)(x) = f(x+t)$, pour $t,x \in \mathbb{R}$. $(G(t))$ définie un C_0-(semi)-groupe. Le générateur est

$$Af := f',$$

avec domaine

$$D(A) := \{f \in L^p(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ absolument continue et } f' \in L^p(\mathbb{R})\}.$$

2. Soient $X = BUC(\mathbb{R})$, et $(G(t)f)(x) = f(x+t)$, pour $t,x \in \mathbb{R}$. $(G(t))$ définit un C_0-(semi)-groupe. Le générateur est

$$Af := f',$$

avec domaine

$$D(A) := \{f \in BUC\mathbb{R} \,|\, f \text{ est dérivable et } f' \in BUC\mathbb{R}\}.$$

2.2 Théorèmes de Hille-Yosida

Le problème fondamentale de la théorie de semi-groupe est la caractérisation des générateurs de semi-groupe.

2.2.1. Definition. Un semi-groupe $(G(t))$ est dit de contractions si pour $t \geq 0$, $\|G(t)\| \leq 1$.

2.2.2. Lemma. *Soit* $(A,D(A))$ *un opérateur fermé densement définie. On suppose qu'il existe* $w \in \mathbb{R}$ *et* $M > 0$ *tels que* $[w,\infty[\subset \rho(A)$ *et* $\|\lambda R(\lambda,A)\| \leq M$ *pour tout* $\lambda \geq w$. *Alors:*

(i) pour tout $x \in X$, $\lambda R(\lambda,A)x \longrightarrow x$ *lorsque* $\lambda \to \infty$.

(ii) pour tout $x \in D(A)$, $\lambda AR(\lambda,A)x = \lambda R(\lambda,A)Ax \longrightarrow Ax$ *lorsque* $\lambda \to \infty$.

Preuve. Si $y \in D(A)$, alors $\lambda R(\lambda,A)y = R(\lambda,A)Ay + y$. Cette expression converge car $\|R(\lambda,A)Ay\| \leq \frac{M}{\lambda}$, et par densité du domaine on obtient le premier point. Le deuxième point est une conséquence du premier point et par le fait que A est fermé. □

Ce lemme suggère une approximation bornée A_n de A.

2.2.3. Thèorème de Hille-Yosida. (Cas de contraction).
Soit $(A,D(A))$ *un opérateur linéaire sur un espace de Banach* X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $(A,D(A))$ *enegendre un* C_0*-semi-groupe de contractions.*

(ii) $(A,D(A))$ *est fermé, densement définie, et pour tout* $\lambda > 0$ *on a* $\lambda \in \rho(A)$ *et*

$$\|\lambda R(\lambda,A)\| \leq 1.$$

(iii) $(A,D(A))$ *est fermé, densement définie, et pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re\lambda > 0$ *on a* $\lambda \in \rho(A)$ *et*

$$\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Preuve. Il suffit de montrer (ii)$\Longrightarrow$(ii).
Shéma de la preuve: On pose $A_n := nAR(n,A) = n^2R(n,A) - nI$ et $T_n(t) := exp(tA_n)$ et on démontre les points suivants:
1- $T(t)x := \lim_{n\to\infty} T_n(t)x$ existe pour tout $x \in X$.
2- $(T(t))$ est un C_0-semi-groupe.
3- $(A,D(A))$ est le générateur.

2.2.4. Definition. L'opérateur $(A,D(A))$ est dit générateur d'un C_0**-groupe** si et seulement si A et $-A$ engendrent des C_0-semi-groupes $(G_1(t))_{t\geq 0}$ et $(G_2(t))_{t\geq 0}$ respectivement. Le groupe $(G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est alors définit par

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t) & \text{si } t \geq 0 \\ G_2(-t) & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

On obtient alors:

2.2.5. Corollaire. (Cas de groupe d'isométries)
Soit $(A,D(A))$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) *$(A,D(A))$ enegendre un C_0-groupe d'isométries.*

(ii) *$(A,D(A))$ est fermé, densement définie, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et*
$$\|\lambda R(\lambda,A)\| \leq 1.$$

(iii) *$(A,D(A))$ est fermé, densement définie, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et*
$$\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{1}{|Re\lambda|}.$$

2.2.6. Théorème de Hille-Yosida. (Cas général)
Soient $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$, $(A,D(A))$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) *$(A,D(A))$ enegendre un C_0-semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ vérifiant pout tout $t \geq 0$*
$$\|G(t)\| \leq Me^{wt}$$

(ii) *$(A,D(A))$ est fermé, densement définie, et pour tout $\lambda > w$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*
$$\|[(\lambda - w)R(\lambda,A)]^n\| \leq M.$$

(iii) *$(A,D(A))$ est fermé, densement définie, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re\lambda > w$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et*
$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{1}{(Re\lambda - w)^n}.$$

2.2.7. Théorème de Hille-Yosida. (Cas de groupes)
Soient $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$, $(A,D(A))$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) *$(A,D(A))$ enegendre un C_0-groupe $(G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ vérifiant pout tout $t \in \mathbb{R}$*
$$\|G(t)\| \leq Me^{w|t|}$$

(ii) *$(A,D(A))$ est fermé, densement définie, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| > w$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*
$$\|[(|\lambda| - w)R(\lambda,A)]^n\| \leq M.$$

(iii) $(A,D(A))$ *est fermé, densement définie, et pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, $|Re\lambda| > w$ *on a* $\lambda \in \rho(A)$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{1}{(|Re\lambda| - w)^n}.$$

2.3 Opérateurs dissipatifs et semi groupes de contractions

Vu l'importance de la classe des générateurs des semi-groupes de contractions, on va essayer de les caractériser.

2.3.1. Definition. Un opérateur linéaire $(A,D(A))$ sur un espace de Banach est **dissipatif** si pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in D(A)$ on a $\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\|$.

Voici quelques propriétés de ces opérateurs

2.3.2. Propriétés. *Soit* $(A,D(A))$ *un opérateur dissipatif. Alors*

(i) Pour tout $\lambda > 0$, $\lambda - A$ *est injectif et*

$$\|(\lambda - A)^{-1}z\| \leq \frac{1}{\lambda}\|z\|,$$

pour tout $z \in Im(\lambda - A) = (\lambda - A)D(A)$.

(ii) $\lambda - A$ *est surjective pour un certain* λ *si et seulement s'il est surjectif pour tout* $\lambda > 0$. *Dans ce cas on a* $]0,\infty[\subset \rho(A)$.

(iii) A *est fermé si et seulement si* $Im(\lambda - A)$ *est fermé pour un certain (donc pour tout)* $\lambda > 0$.

(iv) Si $Im(A) \subset \overline{D(A)}$, *en particulier si* A *est densément défini, alors* A *est fermable. Sa fermeture* $\overline{A}$ *est aussi dissipative et vérifie* $Im(\lambda - \overline{A}) = \overline{Im(\lambda - A)}$ *pour tout* $\lambda > 0$.

Preuve. (i) Direct.
(ii) Supposons que $(\mu - A)$ est surjectif pour un certain $\mu > 0$. D'aprés (i), $\mu \in \rho(A)$ et $\|R(\mu,A)\| \leq \frac{1}{\mu}$. Par le développement du résolvent en série, cela montre que $]0,2\mu[\subset \rho(A)$, et la dissipativité de A implique que $\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, pour tout $0 < \lambda < 2\mu$. De proche en proche on montre le point.
(iii) A est fermé si et seulement si $\lambda - A$ est fermé pour un certain (donc pour tout) $\lambda > 0$. Ceci est équivalent à $R(\lambda,A)\colon Im(\lambda - A) \longrightarrow D(A)$ est fermé, donc si et seulement si son domaine, i.e. $Im(\lambda - A)$ est fermé.
(iv) Soit (x_n) une suite de $D(A)$ tel que $x_n \to 0$ et $Ax_n \to y$. Pour tout $w \in D(A)$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$\|\lambda(\lambda - A)x_n + (\lambda - A)w\| \geq \lambda\|\lambda x_n + w\|.$$

Faisant tendre $n \to \infty$, on obtient $\| - \lambda y + (\lambda - A)w \geq \lambda\|w\|$, et donc $\| - y + w - \frac{1}{\lambda}Aw\| \geq \|w\|$. Faisant $\lambda \to \infty$, $\| - y + w\| \geq \|w\|$, on choisit

$w \in D(A)$ arbitrairement proche de $y \in \overline{Im(A)}$, on obtient $y = 0$. Le reste peut être obtenu par calcul direct. □

Il est clair que tout opérateur qui vérifie l'inégalité de Hille-Yosida est dissipatif. Le théorème suivant est une sorte de caractérisation:

2.3.3. Théorème. (Lumer-Philipps)
Soit $(A,D(A))$ un opérateur dissipatif densement défini. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) La fermeture $\overline{A}$ de A enegendre un C_0-semi-groupe de contractions.

(ii) $Im(\lambda - A)$ est dense dans X pour un certain (donc pour tout) $\lambda > 0$.

Preuve. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Par le théorème 2.2.3, pour tout $\lambda > 0$, $Im(\lambda - \overline{A}) = X$. On conclut en utilisant par 2.3.2(iv).
$(ii) \Longrightarrow (i)$ Par le même argument, la densité de $Im(\lambda - A)$ implique que $(\lambda - \overline{A})$ est surjective. Le point 2.3.2(ii) montre que $]0,\infty[\subset \rho(\overline{A})$, et la dissipativité de A implique l'estimation

$$\|R(\lambda,\overline{A})\| \leq \frac{1}{\lambda},$$

pour tout $\lambda > 0$. Le théorème 2.2.3 termine la preuve. □

Ce théorème justifie la définition suivante:

2.3.4. Definition. Un opérateur dissipatif $(A,D(A))$ tel que $Im(\lambda - A)D(A) = X$ pour un certain (donc pour tout) $\lambda > 0$ est dit m-dissipatif.

Avec cette définition le théorème de Lumer-Philips dit que A est m-dissipatif si et seulement, si A engendre un C_0-semi-groupe de contractions.

Le résultat suivant donne une condition "simple" pour qu'un opérateur engendre un C_0-semi-groupe de contractions.

2.3.4. Corollaire. *Soit $(A,D(A))$ un opérateur densement définie. Si A et A^* sont dissipatifs, alors la fermeture $\overline{A}$ de A engendre un C_0-semi-groupe de contractions.*

Preuve. Par le théorème précédent, il suffit de montrer que $Im(\lambda - A)$ est dense dans X. Supposons le contraire, alors par le théorème de Hahn-Banach il existe $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in D(A)$, $< (I - A)x,x^* >= 0$. Alors $x^* \in D(A^*)$ et $< x,(I - A^*)x^* >= 0$ pour tout $x \in D(A)$. Par densité de $D(A)$, on obtient $(I - A^*)x^* = 0$. Appliquant 2.3.2(i) on aboutit à une contradiction. □

Le cas hilbertien est trés intéressant, d'autant plus que l'on peut donner une version "plus pratique" du théorème de Lumer-Philipps. On rappelle d'abord

2.3.6. Proposition. *Soit H un espace de Hilbert. Alors $(A,D(A))$ est dissipatif si et seulement si $Re < Ax,x > \leq 0$ pour tout $x \in D(A)$.*

Preuve. Si A est dissipatif, on a, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in D(A)$

$$-2\lambda < Ax,x > +\lambda^2\|Ax\|^2 = \|x - \lambda Ax\|^2 - \|x\|^2 \geq 0.$$

En divisant par λ, puis $\lambda \to 0$, on obtient $< Ax,x > \leq 0$, pour tout $x \in D(A)$. Inversement, pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$

$$\|x - \lambda Ax\|^2 - \|x\|^2 = -2\lambda < Ax,x > +\lambda^2\|Ax\|^2 \geq \|x\|^2$$

ce qui montre que A est dissipatif. $\square$

2.3.7. Corollaire. (Lumer-Philipps, cas hilbertien)
Soit $(A,D(A))$ un opérateur linéaire densement défini dans un espace de Hilbert H. Alors A est m-dissipatif si et seulement, si A engendre un C_0-semi-groupe de contractions.

2.3.8. Exemple. (Semi-groupe shift) Soient $H = L^2(0,1)$, et $Af = f'$ avec domain $D(A) = \{f \in H^1(0,1) \,|\, u(1) = 0\}$. Il est clair que $D(A)$ est dense et que le spectre est vide. De plus, on a pour tout $u \in D(A)$, $< u,Au >= -\frac{1}{2}u(0)^2 \leq 0$. Alors A engendre un semi-groupe de contractions (celui de 1.5)

2.3.9. Definition. Soit A un opérateur linéaire dans un espace de Hilbert H, de domaine dense. On dit que A est auto-adjoint (respectivement anti-adjoint) si $A^* = A$ (respectivement si $A^* = -A$).

2.3.10. Proposition. *Soit A un opérateur auto-adjoint négatif dans un espace de Hilbert H. Alors A est m-dissipatif.*
Preuve. Comme A est négatif, A (et donc A^*) est dissipatif (2.3.6.). En utilisant 2.3.4, il suffit de voir que $G(A)$ est fermé, ce qui est vraie car $G(A) = G(A^*)$. $\square$

2.3.11. Corollaire. *Soit A un opérateur linéaire densement défini dans un espace de Hilbert H tel que $G(A) \subset G(A^*)$. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A est auto-adjoint négatif*
Preuve. En appliquant la dernière proposition, il suffit de montrer que si A est m-dissipatif alors A est auto-adjoint. Soit $(x,y) \in G(A^*)$ et soit $z := x - A^*x = x - y$. Puisque A est m-dissipatif, il existe $v \in D(A)$ tel que $z = v - Av$ et puisque $G(A) \subset G(A^*)$, on a $v \in D(A^*)$ et $z = v - A^*v$. Donc $(I - A^*)(v - u) = 0$. Or A^* est dissipatif, par 2.3.(i), $v - u = 0$. $A = A^*$. $\square$

On termine cette section par un résultat trés utile pour la caractérisation des générateurs de groupes unitaires.

2.3.12. Théorème de Stone. *Soit $(A,D(A))$ un opérateur densement définie. sur un espace de Hilbert H. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) A engendre un groupe unitaire.
(ii) A est anti-adjoint,(i.e. $A^* = -A$)
(iii) A et $-A$ sont m-dissipatifs.

Preuve. $(i) \Longrightarrow (ii)$ 1. Si A engendre un groupe unitaire, alors $G^*(t) = G^{-1}(t) = G(-t)$.
2. $-A \subset A^*$. En effet, soient $x,y \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned}
< -Ax,y > &= -\lim_{t\to 0}\left\langle \frac{G(t)x - x}{t},y\right\rangle = -\lim_{t\to 0}\left\langle x,\frac{G^*(t)y - y}{t}\right\rangle \\
&= -\lim_{t\to 0}\left\langle x,\frac{G^{-1}(t)y - y}{t}\right\rangle \\
&= -\lim_{t\to 0}\left\langle x,\frac{G(-t)y - y}{t}\right\rangle =< x,Ay > ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $x \in D(A^*)$ et $< -Ax,y >=< A^*x,y >$.
3. $-A = A^*$. Soient $x \in D(A)$, $y \in D(A^*)$ on a

$$\begin{aligned}
< x,A^*y > &= < Ax,y >= \lim_{t\to 0}\left\langle \frac{G(t)x - x}{t},y\right\rangle = \lim_{t\to 0}\left\langle x,\frac{G^*(t)y - y}{t}\right\rangle \\
&= \lim_{t\to 0}\left\langle x,\frac{G^{-1}(t)y - y}{t}\right\rangle \\
&= \lim_{t\to 0}\left\langle x,\frac{G(-t)y - y}{t}\right\rangle =< x,Ay > ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $y \in D(A)$ et donc $-A = A^*$.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Pour $x \in D(A)$, on a $< Ax,x >=< x,A^*x >= - < x,Ax >$. Donc $< Ax,x >= 0$. Ceci prouve que A et $-A$ sont dissipatifs. On conclut comme pour la proposition 2.3.11.
$(iii) \Longrightarrow (i)$ Direct. □

2.4 Problème de Cauchy abstrait

On revient au point de départ: résoudre le problème de Cauchy abstrait (i.e. à valeurs dans un espace de Banach)

$$(PCA_f)\left\{\begin{array}{l} u'(t) = Au(t) + f(t) \quad t \in [0,T] \\ u(0) = u_0. \end{array}\right.$$

où t représente le temps, $T > 0$ fixé, $f\colon [0,T] \longmapsto X$ continue donné, u est une fonction à valeurs dans X, $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire, et $u_0 \in X$ la donnée initiale.

Dans cette section on suppose que $(A,D(A))$ engendre le C_0-semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$.

2.4.1. Definition. Une fonction $u\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ est dite **solution classique** de (PCA_f) si u est continuement différentiable, i.e. $u \in \mathcal{C}^1([0,T];X) \cap \mathcal{C}([0,T];D(A))$ (içi $D(A)$ est considéré comme espace de Banach muni de la graph de norme), et (PCA_f) est vérifié ($u_0 \in D(A)$).

2.4.2. Proposition.

1. *Pour tout $u_0 \in D(A)$, la fonction*

$$u\colon t \longmapsto u(t) := G(t)u_0$$

est l'unique solution classique du (PCA_0).

2. *Si u est solution classique de (PCA_f). Alors u vérifie (formule de la variation de la constante):*

$$u(t) = G(t)u_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)\,ds. \tag{2.2}$$

Preuve. Le premier point est évident. Soit maintenant $g(s) := G(t-s)u(s)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -AG(t-s)u(s) + G(t-s)u'(s) \\ &= -AG(t-s)u(s) + G(t-s)\left(Au(s) + f(s)\right) = G(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Alors

$$g(t) - g(0) = u(t) - G(t)u_0 = \int_0^t G(t-s)f(s)\,ds.$$

□

On remarque que la solution classique existe si et seulement si la donnée initiale est dans $D(A)$, ce qui est restrictif, mais le second membre de l'égalité précédente a un sens sous des hypothèses plus faible. On va modifier le concept de "solution".

2.4.3. Definition. Si $u_0 \in X$ et $f \in L^1([0,T];X)$. Alors la fonction donnée par (2.2) est appelée **solution mild** de (PCA_f).

2.4.4. Théorème. *Si $u_0 \in D(A)$, $f \in \mathcal{C}([0,T];X)$ et que ou bien $f \in W^{1,1}([0,T];X)$ ou bien $f \in L^1([0,T];D(A))$. Alors la solution mild de (ACP_f) est solution classique.*

Preuve. On pose $v(t) := \int_0^t G(t-s)f(s)\,ds$. Il suffit de montrer que $v \in \mathcal{C}^1([0,T],X) \cap \mathcal{C}([0,T],D(A))$ et que $v'(t) = Av + f$. On note d'abord

$$\frac{G(h)-I}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(t+h-s)f(s)\,ds.$$

Comme f est continue et le semi groupe est fortement continu, le dernier membre de cette égalité tends vers $-f(t)$ lorsque $h \to 0^+$. Ainsi on voit que $Av(t)$ existe si et seulement si v est $\mathcal{C}^1$, donc $v \in \mathcal{C}^1([0,T],X)$ si et seulement si $v \in \mathcal{C}([0,T],D(A))$ et dans ce cas $v' = Av + f$. Si $f \in L^1([0,T],D(A))$, alors il est clair que $v \in \mathcal{C}([0,T],D(A))$. Si $f \in W^{1,1}([0,T],X)$, on écrit alors

$$v(t) = \int_0^t G(s)f(t-s)\,ds,$$

ce qui donne

$$v'(t) = G(t)f(0) + \int_0^t G(s)f'(t-s)\,ds.$$

Donc $v \in \mathcal{C}^1([0,T],X)$. □

Nous allons terminer ce chapitre par un résultat de régularité dans le cas auto-adjoint négatif.

2.4.5. Théorème. *Soient H un espace de Hilbert réel et A un opérateur auto-adjoint négatif et $(G(t))$ le semi-groupe engendré par A. Alors, pour tout $u_0 \in H$, $u(t) := G(t)x$ est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} u \in C\left([0,\infty[,H\right) \cap C\left(]0,\infty[,D(A)\right) \cap C^1\left(]0,\infty[,H\right), & \\ u'(t) = Au(t), & \text{pour tout } t > 0, \\ u(0) = u_0. & \end{cases}$$

De plus, pour tout $t > 0$, on a

$$\|Au(t)\| \leq \frac{1}{t\sqrt{2}}\|u_0\|,$$

$$- < Au(t),u(t) > \leq \frac{1}{2t}\|u_0\|^2,$$

et si $u_0 \in D(A)$, alors

$$\|Au(t)\|^2 \leq -\frac{1}{2t} < Au_0,u_0 > .$$

Preuve. 1. Pour tout $\lambda > 0$, on pose $J_\lambda := (\lambda - A)^{-1}$ et $A_\lambda := AJ_\lambda = \lambda J_\lambda - I$. Alors $A_\lambda \in \mathcal{L}(H)$ et pour tout $x \in D(A)$, $\lim_{\lambda \to 0^+} A_\lambda x - Ax = 0$ et A_λ est auto-adjoint négatif.
2. On pose $u_\lambda(t) := e^{A_\lambda t}$. Les fonctions $\|u_\lambda(t)\|^2$ et $\|u'_\lambda(t)\|^2$ sont décroissantes. De plus

$$\left(\|u_\lambda(t)\|^2\right)' = 2 < A_\lambda u_\lambda(t),u_\lambda(t) > ,$$

$$(< A_\lambda u_\lambda(t),u_\lambda(t) >)' = 2 < A_\lambda u_\lambda(t),u'_\lambda(t) >= 2\|u'_\lambda(t)\|^2,$$

On déduit que $- < A_\lambda u_\lambda(t),u_\lambda(t) >$ est décroissante. En intégrant entre 0 et t,

$$-t < A_\lambda u_\lambda(t),u_\lambda(t) > \leq -\int_0^t < A_\lambda u_\lambda(s),u_\lambda(s) >= 2\|x\|^2,$$

$$\begin{aligned} 2t\|u'_\lambda(t)\|^2 &\leq 2\int_0^t \|u'_\lambda(s)\|^2\,ds = - < A_\lambda x,x > + < A_\lambda u_\lambda(t),u_\lambda(t) > \\ &\leq - < A_\lambda x,x > , \end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned} t^2\|u'_\lambda(t)\|^2 \leq 2\int_0^t s\|u'_\lambda(s)\|^2\,ds &= \int_0^t s\,(< A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) >)'\,ds \\ &\leq -\int_0^t < A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s) > \,ds. \end{aligned}$$

D'où $\|2t^2\|u'_\lambda(t)\|^2 \leq \|x\|^2$. On obtient le résultat par passage à la limite.
3. Reste à montrer l'unicité. Pour cela, on considère $t > 0$ et $0 < \varepsilon < t$. De 2.4.2.2, on déduit que $u(t) = G(t-\varepsilon)u(\varepsilon)$, alors

$$\|u(t) - G(t)x\| \leq \|u(\varepsilon) - x\| + \|G(\varepsilon)x - x\| \longrightarrow 0$$

lorsque $\varepsilon \to 0^+$. Donc $u(t) = G(t)x$, pour tout $t \geq 0$. □

2.4.6. Remarques.

1. Ce théorème dit que le semi-groupe est régularisant: quelque soit la donnée initiale u_0, et dès que $t > 0$, $G(t)u_0 \in D(A)$.
2. Ce qui n'est pas le cas lorsque l'opérateur engendre un groupe unitaire: il est claire que dans ce cas, si $u_0 \notin D(A)$, alors $u(t) \notin D(A)$ pour tout t.

Chapitre 3

Décomposition spectrale du Laplacien sur un ouvert borné

Dans ce chapitre on présente une approche directe pour montrer les propriétés basiques concernant la décomposition spectrale de l'opérateur de Laplace sur un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^N$.

3.1 Opérateurs semi-borné et extension de Friedrichs

Définition 7 *Soit T_0 un opérateur symmetric non borné de domaine $D(T_0)$. On dit que T_0 est semi borné (minoré) s'il existe une constante C tel que*

$$< T_0u,u >_H \geq -C||u||_H^2 \ , \forall u \in D(T_0) \ . \tag{3.1}$$

Exemple (L'opérateur de Schrödinger).
On considère sur $\mathbb{R}^N$ l'opérateur

$$P_V(x,D_x) := -\Delta + V(x) \ , \tag{3.2}$$

où $V(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^N$ (appelé potentiel) tel qu'il existe C t.q. :

$$V(x) \geq -C \ , \forall x \in \mathbb{R}^N \ . \tag{3.3}$$

Alors l'opérateur T_0 définie par $D(T_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et

$$T_0u = P_V(x,D_x)u \ , \forall u \in D(T_0) \ ,$$

est un opérateur symétrique semi-borné.
On a en fait, avec $H = L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} < P(x,D_x)u,u >_H \ &= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u + Vu) \cdot \bar{u} \ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(x)|^2 \ dx \\ &\geq -C||u||_H^2 \ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Théorème 1 .
Un opérateur symétrique semi-borné T_0 sur H (avec domaine $D(T_0)$ dense dans H) admet une extension auto-adjoint.

L'extension standard qui apparaît dans la preuve est l'extension dite de Friedrichs. Ceci est une variante du lemme de Lax-Milgram. En fait, en remplaçant T_0 par $T_0+\lambda_0 Id$, on peut supposer que T_0 est strictement positif plus précisément

$$< T_0 u,u >_H \geq ||u||_H^2 \ , \forall u \in D(T_0) \ . \tag{3.5}$$

On considère la forme bilinéaire associée, définie à priori sur $D(T_0)\times D(T_0)$:

$$(u,v) \longmapsto a_0(u,v) := \langle T_0 u \ , \ v\rangle_H \ . \tag{3.6}$$

L'inégalité (3.5) dit que

$$a_0(u,u) \geq ||u||_H^2 \ , \forall u \in D(T_0) \ . \tag{3.7}$$

On introduit V comme le compléter dans H de $D(T_0)$ pour la norme

$$u \mapsto p_0(u) = \sqrt{a_0(u,u)} \ .$$

Plus concrètement, $u \in H$ appartient à V, s'il existe $u_n \in D(T_0)$ tel que $u_n \to u$ dans H et u_n est une suite de Cauchy pour la norme p_0.
Un candidat naturel pour la norme de V:

$$||u||_V = \lim_{n\to+\infty} p_0(u_n) \ , \tag{3.8}$$

où u_n est une suite de Cauchy pour p_0 qui converge vers u dans H.
Montrons que cette définition ne dépend pas du choix de la suite de Cauchy:
Lemme 3 *Soit x_n une suite de Cauchy dans $D(T_0)$ pour p_0 telle que $x_n \to 0$ dans H. Alors $p_0(x_n) \to 0$.*
Preuve
Tout d'abord on remarque que $p_0(x_n)$ est une suite de Cauchy dans $(0,+\infty)$ et donc converge dans $[0,+\infty)$.
Par contradiction, supposons que

$$p_0(x_n) \to \alpha > 0 \ . \tag{3.9}$$

On a

$$a_0(x_n,x_m) = a_0(x_n,x_n) + a_0(x_n,x_m - x_n) \ ,$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a_0(x_n,x_m - x_n)| \leq \sqrt{a_0(x_n,x_n)} \cdot \sqrt{a_0(x_m - x_n,x_m - x_n)} \ .$$

Comme (x_n) est une suite de Cauchy pour p_0, on obtient que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ t. q. } \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_0(x_n,x_m) - \alpha^2| \leq \epsilon \; . \tag{3.10}$$

On prend $\epsilon = \frac{\alpha^2}{2}$ et on considère le N correspondant donné par (3.10). En utilisant la définition de a_0 on obtient

$$| < T_0 x_n, x_m > | \geq \frac{1}{2}\alpha^2 \; , \forall n \geq N, \forall m \geq N \; . \tag{3.11}$$

Mais lorsque $m \to +\infty$, la partie gauche de (3.11) tend vers 0 puisque $x_m \to 0$ ce qui conduit à une contradiction. □

Comme conséquence de (3.7) et (3.8) on a

$$||u||_V \geq ||u||_H \; , \tag{3.12}$$

Cela veut dire que l'injection de V dans H est continue. Noter aussi que V, qui contient $D(T_0)$, est dense dans H, par la densité de $D(T_0)$ dans H. De plus, on obtient un produit scalaire naturel sur V en prolongeant a_0 :

$$< u,v >_V := \lim_{n \to +\infty} a_0(u_n,v_n) \; , \tag{3.13}$$

où u_n et v_n sont des suites de Cauchy pour p_0 qui convergent respectivement à u et v dans H.
Par le théorème de Lax-Milgram (pour V,H,V') appliqué avec

$$a(u,v) := < u,v >_V \quad ,$$

On obtient ainsi un opérateur (non borné) auto-adjoint S sur H qui prolonge T_0 de domaine $D(S)$ tel que $D(S) \subset V$.

Applications

Application 1: La réalisation de Dirichlet.

Application 2: L'oscillateur harmonique.

3.2 Le spectre du Laplacien

On considère un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^N$ avec une régularité à préciser plus tard.

Le candidat naturel pour être le domaine à considérer est $C^2(\Omega)$. Mais le Laplacien est symétrique pour la structure hilbertienne de L^2. Ainsi l'espace ambiant est $H = L^2(\Omega)$ et l'on considère l'opérateur Δ,$D(\Delta)$ où $D(\Delta) = C_0^2(\Omega)$ l'espace des fonctions C^2 de limite 0 au bord de Ω. Il est clair que cet opérateur est symétrique et positive (donc semi-borné). Il admet donc une extension de Freidrichs que l'on note par Δ^D. Comme nous allons voir en exercice, le domaine de Δ^D est donné par

$$D(\Delta^D) = \{u \in H_0^1(\Omega);\ \ \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Si Ω est régulier (de classe C^2) alors par un argument de régularité (voir par exemple [6]) on a

$$D(\Delta^D) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Dans la suite nous allons noter Δ à la place de Δ^D.
Le théorème suivant est du à Poincaré:

Théorème 2 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, à bord régulier. Alors*

1. *Les valeurs propres de $-\Delta$ constituent une suite non borné $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs.*
2. *Pour tout i, l'espace propre E_i associé à λ_i est de dimension finie. De plus $E_i \subset C_0^\infty(\Omega)$.*
3. *$\bigoplus_i E_i$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*
4. *On a*
$$\lambda_1 = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2} = \inf_{u\in S^1\subset H_0^1(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2. \tag{3.14}$$
and for all $k > 1$
$$\lambda_k = \inf_{u\in E_1\oplus\cdots\oplus E_{k-1}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2}. \tag{3.15}$$

Remarque 6 *1. $-\Delta u = \lambda u$ avec $u \in C^2$ est équivalent à u est un point critique de la fonctionnelle*

$$E(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx$$

sous la contrainte $\int |v|^2 = 1$. Cette dernière assertion est équivalente à: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in S^1$ on a

$$\frac{d}{d\varepsilon} E(u + \varepsilon v)_{|\varepsilon=0} = \lambda \frac{d}{d\varepsilon}(u + \varepsilon v)^2_{|\varepsilon=0}$$

ce qui se traduit par

$$\int -v\Delta u = \int uv$$

2. *Par la régularité elliptique, si u est solution faible, i.e. $u \in H^1$ tel que pour tout $v \in H^1$ on a*

$$\int \nabla u \cdot \nabla v - \lambda uv = 0$$

alors $u \in C^2$ vérifiant $-\Delta u = \lambda u$.

3. *Si $-\Delta u = \lambda u$ et $-\Delta v = \mu v$ avec $\lambda \neq \mu$ alors $u \perp v$. En effet, en supposant par exemple $\lambda \neq 0$ alors*

$$< u,v >_{H^1} = < \nabla u,\nabla v >_{L^2} = < -\Delta u,v >_{L^2} = \lambda < u,v > = \mu < u,v > .$$

Ainsi $< u,v >_{L^2} = 0$.

4. *Si λ est valeur propre et E_λ est l'espace propre associé, alors $dim E_\lambda < \infty$. En effet, cela est conséquence immédiate de l'injection compacte de H_0^1 dans L^2: Pour tout $u \in E_\lambda$ on a $-\Delta u = \lambda u$, alors $\|u\|_{H^1}^2 = (1+\lambda)\|u\|_{L^2}^2$. Ainsi la boule unité de E_λ pour la norme H^1 est relativement compacte pour la norme L^2, i.e. la dimension de $(E_\lambda,\|\cdot\|_{H^1})$ est finie.*

Preuve du théorème 2

1- Soit λ_1 définie par (3.14) (pourquoi elle existe?). Soit alors $(u_n) \subset S^1 \subset H_0^1$ une suite minimisante: $\int |\nabla u_n|^2 \to \lambda_1$. Donc à partir d'un certain rang tous les $u_n \in B(0,2\lambda_1)$. Par la compacité de l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2$, il existe une sous suite u_{n_k} qui converge fortement dans L^2 et faiblement dans H^1 vers u. Alors $\|u\|_{H^1} = \lambda_1$. Ainsi u est un point critique de la fonctionnelle E (voir la remarque précédente). D'où $-\Delta u = \lambda_1 u$.
Si $-\Delta v = \lambda v$ alors $\int |\nabla v|^2 = \lambda_1 \int |v|^2$ alors $\lambda \geq \lambda_1$.
Par la régularité elliptique on voit que

$$E_1 = \{u \in H_0^1 \text{ qui réalient l'inf.}\} \subset C_0^\infty(\Omega).$$

On recommence de même pour λ_2 sur l'orthogonale de E_1 etc$\cdots$.
2- La suite (λ_i) est infinie: puisque $\dim E_{\lambda_i} < \infty$, alors $[\bigoplus_{i\leq j} E_{\lambda_i}]^\perp \neq \{0\}$.
3- La suite (λ_i) est non bornée: sinon il existe une constante $C > 0$ tel que $\lambda_i \leq C$ pour tout i. Considérons (φ_i) des fonctions propres associées avec $\varphi_i \in E_{\lambda_i}$ et $\|\varphi_i\| = 1$. D'après la troisième remarque la suite (φ_i) est L^2 orthonormée et $\|\varphi_i\|_{H^1} \leq 1 + C$. Ainsi la suite est relativement compacte dans L^2, d'où la contradiction.
4-$\bigoplus_{i\leq j} E_{\lambda_i}$ est dense dans L^2: Soit E la fermeture dans H_0^1 de la somme directe. Si $E \subsetneq H_0^1$ alors il existe $u \in H_0^1$, $\|u\|_{L^2} = 1$ et $u \perp_{L^2} E$. Alors $u \perp E_{\lambda_1} \oplus \cdots E_{\lambda_k}$ pour tout k, i.e. $\int |\nabla u|^2 > \lambda_k$ ou bien $\|u\|_{H^1} > 1 + \lambda_k$ pour tout k. Contradiction, car la suite (λ_i) est non bornée. □

Remarque 7 *On rearrange le spectre de la sorte suivante:*
Pour E_{λ_1} on choisit une base orthonormée $\varphi_1,\cdots,\varphi_p$ et l'on nomme $\bar\lambda_1 =$

$\cdots = \bar{\lambda}_p = \lambda_1$ (p est la dimension de l'espace E_{λ_1}) et ainsi de suite. Le spectre sera écrit sous la forme

$$\sigma(-\Delta^D,\Omega) = \{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots\}$$

chaque valeur propre est répétée autant de fois que sa multiplicité (= la dimension de l'espace propre).

Corollaire 2 *La première valeur propre (Dirichlet) est simple et si $u \not\equiv 0$ est une fonction propre à λ_1, alors u ne s'annule en aucun point de Ω.*

Preuve. Comme $|u|\nabla|u| = u\nabla u$, $|u| \in H_0^1$ et $\int |\nabla|u||^2 = \int |\nabla u|^2$ et $\int |u|^2 = \int u^2$. Donc $|u|$ est fonction propre et $-\Delta|u| = \lambda_1|u| \geq 0$. Par le principe du maximum $|u|$ ne s'annule que sur le bord, donc u ne s'annule que sur le bord. u étant régulière, u est strictement positive ou strictement négative dans Ω. Soient u et v deux premières fonctions propres (non nulles) et soit $\alpha \neq 0$ tel que $\alpha \int u = \int v$. Comme $\alpha u - v \in E_{\lambda_1}$ alors, par la première étape, $\alpha u - v$ est > 0, < 0, ou $= 0$ dans Ω. Puisque $\int \alpha u - v = 0$ $\alpha u - v = 0$. $\square$

Corollaire 3 *Pour tout $i \geq 2$, toute fonction propre $u \in E_{\lambda_i}$ change de signe.*

Preuve. Comme $u \perp \varphi_1$ alors $\int u\varphi_1 = 0$. Comme $\varphi_1 > 0$, u change de signe. $\square$

Chapitre 4

Fonctions harmoniques

Dans ce chapitre nous allons utiliser différentes méthodes pour étudier les fonctions harmoniques. Cela comporte la propriété de la valeur moyenne, les solutions fondamentales, les principes du maximum ainsi que les méthodes de l'énergie. Noter que ces sections sont relativement indépendantes. Comme références on peut consulter [2] et [8] pour les sections 1 et 3.

4.1 La propriété de la valeur moyenne

Dans cette section Ω est un domain connexe de $\mathbb{R}^N$.

Définition 8 *Soit $u \in C(\Omega)$. On dit que u vérifie la propriété de la valeur moyenne si pour tout $x \in \Omega$, $r > 0$ avec $B(x,r) \subset \Omega$ on a*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{S(x,r)} u(y)\, d\sigma(y), \tag{4.1}$$

σ_N étant la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 8 *Cette propriété est équivalente au*

$$u(x) = \frac{N}{\sigma_N r^N} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy. \tag{4.2}$$

En fait il suffit d'écrire (4.1)

$$u(x)\rho^{N-1} = \frac{1}{\sigma_N} \int_{S(x,\rho)} u(y)\, d\sigma(y),$$

puis intégrer de 0 à r pour obtenir (4.2). Inversement, en écrivant

$$u(x)r^N = \frac{N}{\sigma_N} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy = \frac{N}{\sigma_N} \int_0^r \int_{S(x,r)} u(y)\, d\sigma(y)\, d\rho,$$

il suffit de dériver pour obtenir (4.1).

Remarque 9 *La propriété (4.1) est équivalente au*

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\sigma_N}\int_{|y|=1} u(x+ry)\,d\sigma(y) \\ &= \frac{N}{\sigma_N}\int_{|z|\le 1} u(x+rz)\,dz. \end{aligned}$$

On démontre maintenant le principe du maximum pour les fonctions qui vérifie la propriété de la moyenne.

Proposition 9 *Soit $u \in C(\overline{\Omega})$ qui vérifie la propriété de la moyenne dans Ω, alors u atteint son maximum et son minimum seulement sur $\partial\Omega$ à moins que u soit constante.*

Preuve. Soient M le max et

$$S := \{x \in \Omega;\ u(x) = M\} \subset \Omega.$$

Il est clair que S est fermé. Montrons que S est ouvert. Pour tout $x_0 \in S$, soit $r > 0$ tel que $\overline{B(x_0,r)} \subset \Omega$. Par (4.2) on a

$$M = u(x_0) = \frac{N}{\sigma_N r^N}\int_{B(x_0,r)} u(y)\,dy \le M\frac{N}{\sigma_N r^N}\int_{B(x_0,r)} dy = M.$$

Ce qui veut dire que $u = M$ sur $B(x_0,r)$. Ainsi S est ouvert et fermé et S est soit vide soit Ω. □

Définition 9 *Une fonction $u \in C^2(\Omega)$ est dite harmonique si $\Delta u = 0$ dans Ω.*

Théorème 3 *Soit $u \in C^2(\Omega)$ une fonction harmonique. Alors u vérifie la propriété de la moyenne dans Ω.*

Preuve. Soit $B(x,r) \subset \Omega$. Pour tout $\rho(0,r)$ on a (en utilisant la formule de Green)

$$\begin{aligned} \int_{B(x,\rho)} \Delta u(y)\,dy &= \int_{\partial B(x,\rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma = \rho^{N-1}\int_{|w|=1}\frac{\partial u}{\partial \rho}(x+\rho w)\,d\sigma(w) \\ &= \rho^{N-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\int_{|w|=1} u(x+\rho w)\,d\sigma(w). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Alors

$$\int_{|w|=1} u(x+\rho w)\,d\sigma(w) = const = \int_{|w|=1} u(x)\,d\sigma(w) = u(x)\sigma_N,$$

ou bien

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N}\int_{|w|=1} u(x+rw)\,d\sigma(w) = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,d\sigma(y).$$

□

Remarque 10 *Une fonction qui satisfait la propriété de la valeur moyenne n'est pas supposée être régulière (elle est seulement continue), tandis qu'une fonction harmonique est, par définition, supposée être C^2. Dans le théorème suivant nous montrons que les deux sont équivalents.*

Théorème 4 *Si $u \in C(\Omega)$ admet la propriété de la valeur moyenne dans Ω, alors u est régulière et est harmonique dans Ω.*

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(B(0,1)$ avec $\int \varphi = 1$, $\varphi(x) := \psi(|x|)$. Ainsi

$$\sigma_N \int_0^1 r^{N-1}\psi(r)\,dr = 1.$$

Soit, pour $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon^N}\varphi(z/\varepsilon)$. Soit, pour $x \in \Omega$, $\varepsilon <$dist$(x,\partial\Omega)$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(y)\varphi_\varepsilon(y-x)\,dy &= \int u(x+y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{|y|<\varepsilon} u(x+y)\varphi(y/\varepsilon)\,dy \\
&= \int_{|y|<1} u(x+\varepsilon y)\varphi(y)\,dy \\
&= \int_0^1 r^{N-1}\,dr \int_{|w|=1} u(x+\varepsilon rw)\varphi(rw)\,d\sigma(w) \\
&= \int_0^1 \psi(r)r^{N-1}\,dr \int_{|w|=1} u(x+\varepsilon rw)\,d\sigma(w) \\
&= u(x)\sigma_N \int_0^1 \psi(r)r^{N-1}\,dr = u(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \Omega_\varepsilon := \{y \in \Omega;\ d(y,\partial\Omega) > \varepsilon\}$, on a $u(x) = [u * \varphi_\varepsilon](x)$. u est donc régulière. De plus par la formule (4.3) et la propriété de la valeur moyenne on a

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} \Delta u &= r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{|w|=1} u(x+rw)\,d\sigma(w) \\
&= r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r}[\sigma_N u(x)] = 0
\end{aligned}$$

pour tout $B(x,r) \subset \Omega$. Ce qui implique que u est harmonique dans Ω. □

Remarque 11 *En combinant les deux théorèmes 3 et 4, on conclut que toute fonction harmonique est régulière et vérifie la propriété de la moyenne, donc le principe du maximum. Comme conséquence on déduit l'unicité du problème de Dirichlet dans un domain borné:*

$$\begin{aligned}
\Delta u &= f \qquad \textit{dans } \Omega \\
u &= g \qquad \textit{sur } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

En général l'unicité n'est pas nécessairement vrai dans un domaine non borné:
Prendre $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| > 1\}$ *alors* $u(x) := \log|x|$ *pour* $N = 2$ *et* $u(x) := |x|^{2-N} - 1$ *si* $N = 3$ *est solution non triviale (bornée).*
Prendre $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N;\ x_N > 0\}$ *et* $u(x) := x_N$ *est solution non triviale (non bornée).*

Dans ce qui suit on discute les estimations sur le gradient.

Lemme 4 *Soit* $u \in C(\overline{B(x_0,R)})$ *une fonction harmonique dans* $B(x_0,R)$. *Alors*

$$|Du(x_0)| \leq \frac{N}{R} \max_{B(x_0,R)} |u|.$$

Preuve. On peut supposer que $u \in C^1(\overline{B(x_0,R)})$. Puisque u est régulière, $D_{x_i}u$ est harmonique, donc $D_{x_i}u$ vérifie la propriété de la valeur moyenne. Alors on a

$$D_{x_i}u(x_0) = \frac{N}{\sigma_N R^N} \int_{B(x_0,R)} D_{x_i}u(y)\, dy = \frac{N}{\sigma_N R^N} \int_{\partial B(x_0,R)} u(y)\nu_i\, d\sigma y$$

ce qui implique

$$|D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{N}{\sigma_N R^N} \max_{\partial B(x_0,R)} |u| \cdot \sigma_N R^{N-1} \leq \frac{N}{R} \max_{\partial B(x_0,R)} |u|.$$

□

Lemme 5 *Soit* $u \in C(\overline{B(x_0,R)})$ *une fonction positive harmonique dans* $B(x_0,R)$. *Alors*

$$|Du(x_0)| \leq \frac{N}{R} u(x_0).$$

Preuve. Par le même calcul, et comme u est positive, on a par la propriété de la valeur moyenne

$$|D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{N}{\sigma_N R^N} \int_{\partial B(x_0,R)} u(y)\, d\sigma(y) = \frac{N}{R} u(x_0).$$

□

Corollaire 4 *Toute fonction harmonique dans* $\mathbb{R}^N$ *majorée ou minorée est constante.*

Preuve. Supposons que $u \geq 0$ et montrons qu'elle est constante. En fait pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ on applique lemme 5 dans $B(x,R)$ puis faire $R \to \infty$. Cela implique que $Du(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. □

Proposition 10 *Soit* $u \in C(\overline{B(x_0,R)})$ *une fonction harmonique dans* $B(x_0,R)$. *Alors pour tout* $|\alpha| = m$

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{N^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{B(x_0,R)} |u|.$$

Preuve. Par récurrence. Le résultat est vrai pour $m = 1$ par le lemme 4. Supposons que c'est vrai pour m. Pour $0 < \theta < 1$, soit $r := (1-\theta)R \in (0,R)$. Par le lemme 4 appliqué à $D^m u$ dans $B(x_0,r)$ on a

$$|D^{m+1}u(x_0)| \leq \frac{N}{r} \max_{B(x_0,r)} |D^m u|.$$

Par l'hypothèse de récurrence on a

$$\max_{B(x_0,r)} |D^m u| \leq \frac{N^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{B(x_0,R)} |u|.$$

Alors on obtient

$$|D^{m+1}u(x_0)| \leq \frac{N}{r} \cdot \frac{N^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{B(x_0,R)} |u| = \frac{N^{m+1} e^{m-1} m!}{R^{m+1}\theta^m(1-\theta)} \max_{B(x_0,R)} |u|.$$

Pour $\theta = \frac{m}{m+1}$ on a

$$\frac{1}{\theta^m(1-\theta)} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m (m+1) < e(m+1).$$

□

Théorème 5 *Toute fonction harmonique est analytique.*

Preuve. Soit u une fonction harmonique dans Ω. Pour $x \in \Omega$ fixé soit $B(x,2R) \subset \Omega$ et $|h| \leq R$ tel que $x + h \in \Omega$. Par Taylor on a

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i!} \left[\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_N \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^i u \right] (x) + R_m(h)$$

où

$$R_m(h) = \frac{1}{m!} \left[\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^m u \right] (x_1 + \theta h_1, \cdots, x_N + \theta h_N)$$

pour certain $\theta \in (0,1)$. Noter que $x + h \in B(x,R)$ pour $|h| < R$. Alors par la proposition 10 on obtient

$$|R_m(h)| \leq \frac{1}{m!} |h|^m \cdot N^m \cdot \frac{N^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{B(x,2R)} |u| \leq \left[\frac{|h| N^2 e}{R} \right]^m \max_{B(x,2R)} |u|.$$

Alors pour tout h avec $|h|N^2 e < R/2$ on a $R_m(h) \to 0$ lorsque $m \to \infty$. □

Dans ce qui suit on prouve l'inégalité de Harnack.

Théorème 6 *Soit u une fonction positive harmonique dans Ω. Alors pour tout compact K de Ω il existe une constante positive $C(\Omega,K)$ telle que pour tous $x,y \in K$*

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y).$$

Preuve. Par la propriété de la valeur moyenne, pour $B(x_0,4R) \subset \Omega$, alors

$$\frac{1}{k}u(y) \leq u(x) \leq ku(y)$$

pour tout $x,y \in B(x_0,R)$, où k est une constante positive qui dépend seulement de N: Par exemple écrire

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{N}{\sigma_N R^N}\int_{B(x,R)} u(z)\,dz \\ &\leq \frac{N}{\sigma_N R^N}\int_{B(y,3R)} u(z)\,dz \\ &\leq 3^N \frac{N}{\sigma_N (3R)^N}\int_{B(y,3R)} u(z)\,dz = 3^N u(y). \end{aligned}$$

Maintenant pour le compact K, prendre $x_1,\cdots,x_n \in K$ tels que les boules $B(x_i,R)$ recouvrent K, avec R tel que $4R <$dist$(K,\partial\Omega)$. Ainsi on peut prendre $C := k^n$. □

Il est bien connu, en intégrant par parties, que si u est harmonique dans Ω alors

$$\int_\Omega u\Delta\varphi = 0$$

pour tout $\varphi \in C_0^2(\Omega)$. La réciproque est vraie aussi (Weyl).

Théorème 7 *Soit $u \in C(\Omega)$ vérifiant*

$$\int_\Omega u\Delta\varphi = 0 \tag{4.4}$$

pour tout $\varphi \in C_0^2(\Omega)$. Alors u est harmonique dans Ω.

Preuve. On commence par montrer que

$$r\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,d\sigma(y) = N\int_{B(x,r)} u(y)\,dy. \tag{4.5}$$

On peut prendre $x = 0$. Soient

$$\varphi(y,r) := \begin{cases} (|y|^2 - r^2)^{N+2} & |y| \leq r \\ 0 & |y| > r \end{cases}$$

et pour $k = 2,\cdots,N$

$$\varphi_k(y,r) := \begin{cases} (|y|^2 - r^2)^{N-k}[2(N-k+1)|y|^2 + N(|y|^2 - r^2)] & |y| \leq r \\ 0 & |y| > r \end{cases}$$

Un calcul direct montre que $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ et que

$$\Delta_y\varphi(y,r) := \begin{cases} 2N\varphi_2(y,r) & |y| \leq r \\ 0 & |y| > r \end{cases}$$

Par (4.4) on a

$$\int_{B(0,r)} u(y)\varphi_2(y,r)\,dy = 0.$$

On montre maintenant que si pour un certain $2 \leq k \leq N-1$

$$\int_{B(0,r)} u(y)\varphi_k(y,r)\,dy = 0 \tag{4.6}$$

alors

$$\int_{B(0,r)} u(y)\varphi_{k+1}(y,r)\,dy = 0. \tag{4.7}$$

Pour cela, en dérivant (4.6) par rapport à r on obtient

$$\int_{\partial B(0,r)} u(y)\varphi_k(y,r)\,dy + \int_{B(0,r)} u(y)\frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(y,r)\,dy = 0.$$

Comme, pour $2 \leq k \leq N-1$, $\varphi_k(y,r) = 0$ pour $|y| = r$, on a

$$\int_{B(0,r)} u(y)\frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(y,r)\,dy = 0.$$

Puisque $\frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(y,r) = -2r(N-k+1)\varphi_{k+1}(y,r)$ on obtient (4.7). Prendre $k = N-1$ dans (4.7) on obtient

$$\int_{B(0,r)} u(y)[(N+2)|y|^2 - Nr^2]\,dy = 0.$$

En dérivant par rapport à r on obtient (4.5). Alors on a

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{\sigma_N r^{N-1}}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,d\sigma(y)\right] \\
&\quad = \frac{n}{\sigma_N}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^N}\int_{B(x,r)} u(y)\,dy\right] \\
&\quad = \frac{n}{\sigma_N}\left[-\frac{n}{r^{N+1}}\int_{B(x,r)} u(y)\,dy + \frac{1}{r^N}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,d\sigma(y)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{\sigma_N r^{N-1}}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,d\sigma(y) = const.$$

En faisant tendre $r \to 0$ on déduit que cette constante est $u(x)$. D'où u vérifie la propriété de la valeur moyenne dans Ω. $\square$

4.2 Solutions fondamentales

On commence cette section par la recherche d'une fonction harmonique u dans $\mathbb{R}^N$ qui dépend seulement de $r := |x-a|$ pour un certain $a \in \mathbb{R}^N$ fixé. Posons alors $v(r) := u(x)$. Cela implique que

$$v'' + \frac{N-1}{r}v' = 0,$$

d'où

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \log r, & N = 2 \\ c_3 + c_4 r^{2-N}, & N \geq 3 \end{cases}$$

où les c_i sont constantes. On cherche une fonction avec singularité vérifiant pour tout $r > 0$

$$\int_{\partial B(a,r)} \frac{\partial v}{\partial r}\, d\sigma = 1.$$

Posons, pour $a \in \mathbb{R}^N$ fixé,

$$\Gamma(a,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log|a-x|, & N = 2 \\ \dfrac{1}{\sigma_N(2-N)}|a-x|^{2-N}, & N \geq 3. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ fixé, $\Gamma(a,x)$ est harmonique pour $x \neq a$

$$\Delta_x \Gamma(a,x) = 0, \qquad \text{pour } x \neq a$$

et qui est singulière en $x = a$. De plus, pour tout $r > 0$

$$\int_{\partial B(a,r)} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}\, d\sigma(x) = 1.$$

Dans ce qui suit on montre l'identité de Green:

Théorème 8 *Soient Ω un domain borné de $\mathbb{R}^N$ et $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Alors pour tout $a \in \Omega$ on a*

$$u(a) = \int_\Omega \Gamma(a,x)\Delta u(x)\, dx - \int_{\partial\Omega}\left[\Gamma(a,x)\frac{\partial u}{\partial n_x}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}(a,x)\right] d\sigma(x). \tag{4.8}$$

Preuve. Par la formule de Green sur le domain $\Omega\backslash B(a,r)$, r petit, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\backslash B(a,r)} (\Gamma\Delta u - u\Delta\Gamma)\, dx \;&=\; \int_{\partial\Omega}\left[\Gamma\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\right] d\sigma(x) \\ &\quad - \int_{\partial B(a,r)}\left[\Gamma\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\, d\sigma(x)\right].\end{aligned}$$

Comme $\Delta\Gamma = 0$ dans $\Omega\backslash B(a,r)$, on a

$$\int_\Omega \Gamma \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \left[\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right] d\sigma(x) - \lim_{r\to 0} \int_{\partial B(a,r)} \left[\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \, d\sigma(x)\right].$$

Pour $N \geq 3$, on obtient par definition de Γ

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(a,r)} \Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma \right| &= \left| \frac{r^{2-N}}{(2-n)\sigma_N} \int_{\partial B(a,r)} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma \right| \\ &\leq \frac{r}{N-2} \sup_{\partial B(a,r)} |Du| \to 0 \text{ lorsque } r \to 0 \end{aligned}$$

et

$$\int_{\partial B(a,r)} u \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \, d\sigma = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B(a,r)} u \, d\sigma \to u(a) \text{ lorsque } r \to 0.$$

On obtient la même chose pour $N = 2$. □

Remarque 12 *(i) Pour tout $a \in \Omega$, la fonction $x \longmapsto \Gamma(a,x)$ est integrable sur Ω malgré la singularité en a.*

(ii) Pour $a \notin \overline{\Omega}$, l'expression de (4.8) vaut zéro.

(iii) En faisant $u = 1$ on obtient pour tout $a \in \Omega$

$$\int_{\partial B(a,r)} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_x} \, d\sigma(x) = 1.$$

Dans la suite nous expliquons un choix des fonctions de Green: Supposons que Ω est borné et $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, par le théorème 8 précédent on a pour tout $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x,y)\Delta u(y) \, dy - \int_{\partial\Omega} \left[\Gamma(x,y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - u(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(x,y)\right] d\sigma(y). \tag{4.9}$$

Si u est solution du problème, valeur au bord, de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.10}$$

pour certaines fonctions $f \in C(\overline{\Omega})$ et $\varphi \in C(\partial\Omega)$, alors, en vue de (4.9) u peut être exprimée en fonction de f et φ et un terme inconnu $(\partial u / \partial n)$. Dans ce qui suit nous allons ajuster Γ pour éliminer cet inconnu.

Pour $x \in \Omega$ fixé, soit

$$\gamma(x,y) := \Gamma(x,y) + \Phi(x,y)$$

pour une certaine $y \longmapsto \Phi(x,y) \in C^2(\overline{\Omega})$ avec $\Delta_y \Phi(x,y) = 0$ dans Ω. Alors par Théorème 8 on a pour tout $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_\Omega \gamma(x,y) \Delta u(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} \left[\gamma(x,y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - u(y) \frac{\partial \gamma}{\partial n_y}(x,y) \right] d\sigma(y)$$

puisque le terme supplémentaire Φ est harmonique. Nous allons maintenant effectuer un choix particulier de Φ:
Pour tout $x \in \Omega$ fixé, choisir $y \longmapsto \Phi(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \Delta_y \Phi(x,y) = 0 & \text{pour } y \in \Omega \\ \Phi(x,y) = -\Gamma(x,y) & \text{pour } y \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.11}$$

Avec ce choix de Φ, notons $G(x,y) = \gamma(x,y)$ dite **fonction de Green**. Si une telle fonction G existe alors la solution u du problème de Dirichlet (4.10) peut être exprimée par

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y)\, d\sigma(y).$$

A noter que la fonction de Green G est définie comme fonction de y pour tout $x \in \Omega$ fixé. Dans la suite nous allons discuter les propriétés de G en tant que fonction de x et de y. Une première conséquence est l'unicité: puisque la différence de deux fonctions de Green est harmonique avec valeur zéro au bord, donc nulle par le principe du maximum. En fait elle est même symétrique:

Proposition 11 *La fonction de Green est symétrique dans $\Omega \times \Omega$.*

Preuve. Soient $x_1, x_2 \in \Omega$, $x_1 \neq x_2$ et $r > 0$ tel que $B(x_1,r) \cap B(x_2,r) = \emptyset$. Posons $G_1(y) := G(x_1,y)$ et $G_2(y) := G(x_2,y)$. En appliquant la formule de Green dans $\Omega \backslash B(x_1,r) \cup B(x_2,r)$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \backslash B(x_1,r) \cup B(x_2,r)} G_1 \Delta G_2 - G_2 \Delta G_1 \quad &= \quad \int_{\partial\Omega} \left[G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] d\sigma \\ &- \int_{\partial B(x_1,r)} \left[G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] d\sigma - \int_{\partial B(x_2,r)} \left[G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Puisque G_i sont harmoniques pour $y \neq x_i$, $i = 1,2$ et s'annule sur $\partial\Omega$ on a

$$\int_{\partial B(x_1,r)} \left[G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] d\sigma + \int_{\partial B(x_2,r)} \left[G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] d\sigma = 0.$$

La limite lorsque $r \to 0$ est la même que la limite de

$$\int_{\partial B(x_1,r)} \left[\Gamma \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right] d\sigma + \int_{\partial B(x_2,r)} \left[G_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial n} - \Gamma \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] d\sigma = 0.$$

Puisque

$$\int_{\partial B(x_1,r)} \Gamma \frac{\partial G_2}{\partial n}\, d\sigma \to 0, \qquad \int_{\partial B(x_2,r)} \Gamma \frac{\partial G_1}{\partial n}\, d\sigma \to 0 \text{ lorsque } r \to 0$$

et

$$\int_{\partial B(x_1,r)} G_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial n}\, d\sigma \to G_2(x_1), \quad \int_{\partial B(x_2,r)} G_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial n}\, d\sigma \to G_1(x_2) \text{ lorsque } r \to 0,$$

on obtient $G_1(x_2) - G_2(x_1) = 0$ ou bien $G(x_1,x_2) = G(x_2,x_1)$. □

Proposition 12 *Pour tout $x,y \in \Omega$, $x \neq y$ on a*

$$\begin{aligned} \Gamma(x,y) < G(x,y) < 0 &\quad \textit{pour } N \geq 3 \\ \Gamma(x,y) - \frac{1}{2\pi}\log diam(\Omega) < G(x,y) < 0 &\quad \textit{pour } N = 2. \end{aligned}$$

Preuve. Fixons $x \in \Omega$ et posons $G(y) := G(x,y)$. Puisque $\lim_{y\to x} G(y) = -\infty$ il existe alors $r > 0$ tel que $G(y) < 0$ dans la boule $B(x,r)$. Rappelons que G est harmonique dans $\Omega \backslash B(x,r)$ avec $G = 0$ sur $\partial\Omega$ et $G < 0$ sur $\partial B(x,r)$. Par le principe du maximum $G < 0$ dans $\Omega\backslash B(x,r)$. D'où $G < 0$. Pour l'autre inégalité: Par la definition de la fonction de Green

$$G(x,y) = \Gamma(x,y) + \Phi(x,y)$$

avec

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Phi = -\Gamma & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour $N \geq 3$, on a

$$\Gamma(x,y) = \frac{1}{(2-N)\sigma_N}|x-y|^{2-N} < 0$$

donc $\Phi(x,\cdot) > 0$ on $\partial\Omega$. Par le principe du maximum, $\Phi > 0$ dans Ω. Pour $n = 2$, on a

$$\Gamma(x,y) = \frac{1}{2\pi}\log|x-y| \leq \frac{1}{2\pi}\log \mathrm{diam}(\Omega)$$

pour $y \in \partial\Omega$. D'où par le principe du maximum, $\Phi > -\frac{1}{2\pi}\log \mathrm{diam}(\Omega)$. □

Les quelques résultats suivants sont laissés comme exercice.

Proposition 13 *La fonction de Green sur la boule $B(0,R)$ est donnée par*

(i) Pour $n \geq 3$

$$G(x,y) = \frac{1}{(2-N)\sigma_N}\left[|x-y|^{2-N} - \left|R\frac{x}{|x|} - \frac{|x|}{R}y\right|^{2-N}\right];$$

(ii) Pour $N=2$

$$G(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left[\log|x-y|-\log\left|R\frac{x}{|x|}-\frac{|x|}{R}y\right|\right].$$

et sa dérivée normale est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y)=\frac{R^2-|x|^2}{\sigma_N R|x-y|^N}$$

pour tout $x\in B(0,R)$ et $y\in\partial B(0,R)$.

Remarque 13 *La fonction*

$$K(x,y):=\frac{\partial G}{\partial n}(x,y)=\frac{R^2-|x|^2}{\sigma_N R|x-y|^N}$$

*dite **noyau de Poisson** vérifie les propriétés suivantes:*

(i) $K(x,y)$ est régulière pour $x\neq y$;

(ii) $K(x,y)>0$ pour $|x|<R$;

(iii) $\int_{|y|=R}K(x,y)\,d\sigma(y)=1$ pour tout $|x|<R$.

Théorème 9 Formule intégrale de Poisson. *Pour tout $\varphi\in C(\partial B(0,R))$, la fonction u définie par*

$$u(x):=\begin{cases}\int_{\partial B(0,R)}K(x,y)\varphi(y)\,d\sigma(y) & |x|<R\\ \varphi(x) & |x|=R\end{cases}$$

vérifie $u\in C(\overline{\Omega})\cap C^\infty(\Omega)$ et

$$\begin{cases}\Delta u=0 & dans\ \Omega\\ u=\varphi & dans\ \partial\Omega\end{cases}.$$

Remarque 14 *Dans la formule intégrale de Poisson, en remplaçant x par 0, on obtient*

$$u(0)=\frac{1}{\sigma_N R^{N-1}}\int_{\partial B(0,R)}\varphi(y)\,d\sigma(y)$$

qui n'est autre que la propriété de la valeur moyenne.

Lemme 6 ***Inégalité de Harnack.*** *Supposons que u est harmonique dans $B(x_0,R)$ et $u\geq 0$. Alors*

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{N-2}\frac{R-r}{R+r}u(x_0)\leq u(x)\leq\left(\frac{R}{R-r}\right)^{N-2}\frac{R+r}{R-r}u(x_0)$$

où $r=|x-x_0|<R$.

Corollaire 5 *Toute fonction harmonique dans $\mathbb{R}^N$ majorée ou minorée est constante.*

Théorème 10 *Supposons que u est harmonique dans $B(0,R)\backslash\{0\}$ satisfaisant*

$$u(x) := \begin{cases} o(\log(|x|)), & N = 2 \\ o(|x|^{2-N}) & n \geq 3 \end{cases} \quad \textit{lorsque } x \to 0.$$

Alors u est prolongeable en une fonction C^2 et harmonique dans $B(0,R)$.

Remarque 15 *Vérifier que la fonction de Green sur le demi-espace $\mathbb{R}^N_+ := \mathbb{R}^{N-1} \times (0,+\infty)$ est donné par*

$$G(x,y) := \Gamma(x,y) - \Gamma(\tilde{x},y)$$

où $\tilde{x} = (x_1,\cdots,x_{N-1},-x_N)$, avec $x = (x_1,\cdots,x_N)$. Le noyau de Poisson est

$$K(x,y) := \frac{2x_N}{N\sigma_N}\frac{1}{|x-y|^N}$$

pour $x \in \mathbb{R}^N_+$, $y \in \partial\mathbb{R}^N_+$ et la formule de Poisson devient

$$u(x) = \frac{2x_N}{N\sigma_N}\int_{\partial\mathbb{R}^N_+} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^N}\,dy$$

pour $x \in \mathbb{R}^N$. On doit vérifier facilement que pour $\varphi \in C(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$, u ainsi définie vérifie

- *$u \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N_+$,*
- *$\Delta u = 0$ dans $\mathbb{R}^N_+$, et*
- *pour tout $x^0 \in \partial\mathbb{R}^N_+$, $\lim\limits_{x\to x^0,\, x\in\mathbb{R}^N_+} u(x) = g(x^0)$.*

4.3 Principes du maximum

Dans cette section nous allons utiliser le principe du maximum pour tirer des estimations sur le gradient ainsi que l'inégalité de Harnack.

Théorème 11 *Soit $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ une fonction sous harmonique dans $B(0,1)$, i.e. $-\Delta u \leq 0$. Alors*

$$\sup_{B(0,1)} u \leq \sup_{\partial B(0,1)} u.$$

Preuve. Pour $\varepsilon > 0$ soit $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2$ in $B(0,1)$. Alors

$$\Delta u_\varepsilon = \Delta u + 2N\varepsilon \geq 2N\varepsilon > 0.$$

Il est clair que u_ε ne peut pas avoir un maximum à l'intérieur. (Si non, par contradiction, soit $x_0 \in B(0,1)$ tel que $u_\varepsilon(x_0) = \sup u_\varepsilon$. Donc $\Delta u_\varepsilon(x_0) \leq 0$.) En particulier

$$\sup_{B(0,1)} u_\varepsilon \leq \sup_{\partial B(0,1)} u_\varepsilon.$$

Donc on a

$$\sup_{B(0,1)} u \leq \sup_{B(0,1)} u_\varepsilon \leq \sup_{\partial B(0,1)} u + \varepsilon.$$

On termine la preuve en faisant tendre $\varepsilon \to 0$. □

Remarque 16 *Le résultat reste vrai si l'on remplace $B(0,1)$ par n'importe quel domaine borné.*

Le résultat suivant est l'estimation du gradient à l'intérieur pour les fonctions harmoniques (Bernstein 1910).

Proposition 14 *Soit u une fonction harmonique dans $B(0,1)$. Alors*

$$\sup_{B(0,\frac{1}{2})} |Du| \leq C \sup_{\partial B(0,1)} |u|$$

où $C = C(N)$ est une constante positive. En particulier pour tout $\alpha \in [0,1]$ there exists $c = c(N,\alpha)$ such that pour tout $x,y \in B(0,\frac{1}{2})$

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^\alpha \sup_{\partial B(0,1)} |u|.$$

Preuve. Par un calcul direct, on a

$$\Delta(|Du|^2) = 2 \sum_{1\leq i,j\leq N} (D_{i,j}u)^2 + 2 \sum_{1\leq i\leq N} D_i u D_i(\Delta u) = 2 \sum_{1\leq i,j\leq N} (D_{i,j}u)^2$$

puisque $\Delta u = 0$ dans $B(0,1)$. Donc $|Du|^2$ est sous harmonique. Pour obtenir l'estimation intérieur on a besoin d'une fonction plateau. Pour toute fonction $\varphi \in C_0^1(B(0,1))$ on a

$$\Delta(\varphi|Du|^2) = \Delta\varphi|Du|^2 + 4 \sum_{1\leq i,j\leq N} D_i\varphi D_j u D_{i,j}u + 2\varphi \sum_{1\leq i,j\leq N} (D_{i,j}u)^2.$$

En prenant $\varphi = \eta^2$ pour une certaine $\eta \in C_0^1(B(0,1))$ avec $\eta = 1$ dans $B(0,1/2)$ on obtient par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\Delta(\eta^2|Du|^2) &= 2\eta\Delta\eta|Du|^2 + 2|D\eta|^2|Du|^2 + 8\eta \sum_{1\leq i,j\leq N} D_i\eta D_j u D_{i,j}u \\ &\quad + 2\eta^2 \sum_{1\leq i,j\leq N} (D_{i,j}u)^2.\end{aligned}$$

Comme

$$\left|\sum_{i,j} D_i\eta D_j u D_{ij}u\right| \leq \frac{1}{2}\sum (D_i\eta)^2(D_ju)^2 + \frac{1}{2}\sum (D_{ij}u)^2$$

et $0 \leq \eta \leq 1$ on a

$$8\eta \sum_{i,j} D_i\eta D_j u D_{ij}u \geq -4|D\eta|^2|Du|^2 + 4\eta\sum (D_{ij}u)^2$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta(\eta^2|Du|^2) &\geq [2\eta\Delta\eta - 2|D\eta|^2]|Du|^2 + (2\eta^2+4\eta)\sum (D_{ij}u)^2 \\ &\geq \left[2\eta\Delta\eta - 2|D\eta|^2\right]|Du|^2 \geq -C|Du|^2 = -\frac{C}{2}\Delta u^2\end{aligned}$$

où $C = C(N)$ est une constante positive. Puisque u est harmonique on a $\Delta u^2 = 2|Du|^2 + 2u\Delta u = 2|Du|^2$. D'où en prenant α grand on obtient

$$\Delta\left[\eta^2|Du|^2 + \alpha u^2\right] \geq 0.$$

On utilise le Théorème 11 (le principe du maximum) pour obtenir le résultat, puisque

$$\sup_{B(0,\frac{1}{2})} |Du|^2 \leq \sup_{B(0,1)} (\eta^2|Du|^2 + \alpha u^2) \leq \sup_{\partial B(0,1)} \alpha u^2.$$

□

Lemme 7 *Soit u une fonction harmonique positive dans $B(0,1)$. Alors il existe une constante positive $C = C(N)$ telle que*

$$\sup_{B(0,\frac{1}{2})} |D\log u| \leq C.$$

Preuve. On peut supposer que $u > 0$ dans la boule unité. Soit $v := \log u$, alors $\Delta v = -|Dv|^2$ (car u est harmonique). On a besoin de l'estimation du gradient à l'intérieur. Soit $w := |Dv|^2$, alors on a

$$\begin{aligned}\Delta w + 2\sum_{1\leq i\leq N} D_ivD_iw &= 2\sum_{1\leq i,j\leq N}(D_{ij}v)^2 + 2\sum_i D_ivD_i\left[w + \sum_j D_{jj}v\right] \\ &= 2\sum_{1\leq i,j\leq N}(D_{ij}v)^2.\end{aligned}$$

On a besoin, comme avant, d'une fonction plateau. Notons d'abord que

$$\sum_{1\leq i,j\leq N}(D_{ij}v)^2 \geq \sum_{1\leq i\leq N}(D_{ii}v)^2 \geq \frac{1}{N}(\Delta v)^2 = \frac{|Dv|^4}{N} = \frac{w^2}{N}. \qquad (4.12)$$

Soit $\varphi \in C_0^1(B(0,1))$ une fonction positive. Par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
&\Delta(\varphi w) + 2\sum_{i=1}^{N} D_i v D_i(\varphi w) \\
= \;& 2\varphi \sum_{1\le i,j\le N} (D_{i,j}v)^2 + 2w\sum_{i=1}^{N} D_i\varphi D_i v + 4\sum_{1\le i,j\le N} D_i\varphi D_j v D_{i,j} v + w\Delta\varphi \\
\ge \;& \varphi \sum_{1\le i,j\le N} (D_{i,j}v)^2 - 2|D\varphi|\,|Dv|^3 - \left[C\frac{|D\varphi|^2}{\varphi} + |\Delta\varphi|\right]|Dv|^2
\end{aligned}$$

où φ est choisie telle que $|D\varphi|^2/\varphi$ est bornée dans $B(0,1)$. En choisissant $\varphi = \eta^4$, $\eta \in C_0^1(B(0,1))$, on obtient en utilisant (4.12)

$$\begin{aligned}
&\Delta(\eta^4 w) + 2\sum_{i=1}^{N} D_i v D_i(\eta^4 w) \\
= \;& \frac{1}{N}\eta^4|Dv|^4 - C\eta^3|D\eta|\,|Dv|^3 - 4\eta^2(\eta\Delta\eta + C|D\eta|^2)|Dv|^2 \\
\ge \;& \frac{1}{N}\eta^4|Dv|^4 - C\eta^3|Dv|^3 - C\eta^2|Dv|^2
\end{aligned}$$

où C est une constante positive dépendant seulement de N et η. Si $\eta^4 w$ atteint son maximum en $x_0 \in B(0,1)$. Donc $D(\eta^4 w) = 0$ et $\Delta(\eta^4 w) \le 0$ en x_0. Alors $\frac{1}{N}\eta^4|Dv|^4 - C\eta^3|Dv|^3 - C\eta^2|Dv|^2 \le 0$ et donc ηw est petit: $\eta^4 w^2(x_0) \le C(N,\eta)$. Si $w(x_0) \ge 1$ alors $\eta^4 w(x_0) \le C(N,\eta)$. Sinon, $\eta^4 w(x_0) \le \eta^4(x_0)$. Dans les deux cas on a

$$\eta^4 w \le C(N,\eta).$$

□

Cela donne l'inégalité de Harnack:

Corollaire 6 *Soit u une fonction harmonique positive dans $B(0,1)$. Alors il existe une constante positive $C = C(N)$ telle que pour tous $x_1,x_2 \in B(0,\frac{1}{2})$*

$$u(x_1) \le Cu(x_2).$$

Preuve. On peut supposer que $u > 0$ dans $B(0,1)$. Pour tous $x_1,x_2 \in B(0,\frac{1}{2})$, en utilisant le lemme 7 on obtient

$$\log\frac{u(x_1)}{u(x_2)} \le |x_1 - x_2| \int_0^1 |D\log u(tx_2 + (1-t)x_1)|\, dt \le C|x_1 - x_2|.$$

□

Maintenant on donne un lemme de Hopf quantitative:

Proposition 15 *Soit $u \in C(\overline{B(0,1)})$ une fonction harmonique dans $B(0,1)$. Si $u(x) < u(x_0)$ pour tout $x \in B(0,1)$ et certain $x_0 \in \partial B(0,1)$. Alors il existe un constante positive $C = C(N)$ telle que*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geq C[u(x_0) - u(0)].$$

Preuve. Soit la fonction positive définie dans $B(0,1)$ par $v(x) := e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha}$. On a pour $|x| \geq \frac{1}{2}$

$$\Delta v(x) = e^{-\alpha|x|^2}(-2\alpha n + 4\alpha^2|x|^2) > 0$$

si $\alpha \geq 2N + 1$. Ainsi, pour un tel α fixé, la fonction v est sous harmonique dans la région $A := B(0,1) \backslash B(0,1/2)$. Soit maintenant, pour $\epsilon > 0$

$$h_\epsilon(x) := u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x).$$

h_ϵ est aussi une fonction sous harmonique dans A. On a $h_\epsilon \leq 0$ sur $\partial B(0,1)$ et $h_\epsilon(x_0) = 0$. Puisque $u(x) < u(x_0)$ pour $|x| = 1/2$, on peut prendre ϵ petit de telle sorte $h_\epsilon < 0$ pour $|x| = 1/2$. Par le théorème 11 h_ϵ atteint au point x_0 son maximum sur A. D'où

$$\frac{\partial h_\epsilon}{\partial n}(x_0) \geq 0 \text{ ou bien } \frac{\partial h_\epsilon}{\partial n}(x_0) \geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial n}(x_0) = 2\alpha\epsilon e^{-\alpha} > 0.$$

A noter que jusqu'à maintenant on a utilisé le fait que u est sous harmonique. Afin d'estimer ϵ soit $w := u(x_0) - u(x)$. w est harmonique dans $B(0,1)$. Par l'inégalité de Harnack (corollaire 6) on a

$$\inf_{B(0,1/2)} u \geq c(N)w(0) \text{ ou bien } \max_{B(0,1/2)} u \leq u(x_0) - c(N)[u(x_0) - u(0)].$$

Alors on peut prendre

$$\epsilon = \delta c(N)[u(x_0) - u(0)]$$

pour δ petit, dépendant de N. $\square$

On termine cette section par un résultat de continuité global de Hölder:

Lemme 8 *Soit $u \in C(\overline{B(0,1)})$ une fonction harmonique dans $B(0,1)$ avec $u = \varphi$ sur $\partial B(0,1)$. Si $\varphi \in C^\alpha(\partial B(0,1))$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$, alors $u \in C^{\alpha/2}(\overline{B(0,1)})$. De plus, il existe une constante $C = C(N,\alpha)$ telle que*

$$\|u\|_{C^{\alpha/2}(\overline{B(0,1)})} \leq C\|\varphi\|_{C^\alpha(\overline{B(0,1)})}.$$

Preuve. D'abord par le principe du maximum on a

$$\inf_{\partial B(0,1)} \varphi \leq u \leq \sup_{\partial B(0,1)} \varphi$$

dans $B(0,1)$. Montrons que pour tout $x_0 \in \partial B(0,1)$ on a

$$\sup_{x \in B(0,1)} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in B(0,1)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|}{|x - x_0|^{\alpha}}. \tag{4.13}$$

En effectuant des translations on peut remplacer la boule $B(0,1)$ par $O = B((1,0,\cdots,0),1)$, $x_0 = 0$ et $\varphi(0) = 0$. Soit $K := \sup_{x \in \partial O} |\varphi(x)|/|x|^{\alpha}$. Puisque

x

x_1

x_0

$|x|^2 = 2x_1$ pour $x \in \partial O$ (car $1 = (1 - x_1)^2 + y^2$), on a pour tout $x \in \partial O$

$$\varphi(x) \leq K|x|^{\alpha} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} K x_1^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Soit $v(x) := 2^{\frac{\alpha}{2}} K x_1^{\frac{\alpha}{2}}$. Alors pour tout $x \in O$

$$\Delta v(x) = 2^{\frac{\alpha}{2}} K \cdot \frac{\alpha}{2} \left[\frac{\alpha}{2} - 1\right] x_1^{\frac{\alpha}{2} - 2} < 0.$$

Le théorème 11 implique

$$u(x) \leq v(x) = 2^{\frac{\alpha}{2}} K x_1^{\frac{\alpha}{2}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} K |x|^{\frac{\alpha}{2}}$$

pour tout $x \in O$. en considérant $-u$ on obtient

$$|u(x)| \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} K |x|^{\frac{\alpha}{2}}$$

pour tout $x \in O$, ce qui prouve (4.13).

Montrons maintenant que (4.13) termine la preuve du lemme: En effet, pour tout $x,y \in B(0,1)$ notons $d_x :=$dist$(x,\partial B(0,1)$ et $d_y :=$dist$(y,\partial B(0,1))$. Supposons que $d_y \leq d_x$ et soient $x_0,y_0 \in \partial B(0,1)$ tels que $|x - x_0| = d_x$ et $|y - y_0| = d_y$. Supposons d'abord que $|x - y| \leq d_x$ alors $y \in \overline{B(x,d_x)} \subset B(x,d_x) \subset B(0,1)$. Par la proposition 14 appliquée à la fonction $u - u(x_0)$ dans $B(x,d_x)$ on obtient, en utilisant aussi (4.13)

$$\begin{aligned} d_x^{\frac{\alpha}{2}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{\alpha}{2}}} &\leq d_x^{\frac{\alpha}{2}} \left\| y \longmapsto \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{\alpha}{2}}} \right\|_{L^\infty(B(x,d_x))} = |u(x) - u(x_0)| \\ &\leq C d_x^{\frac{\alpha}{2}} \|\varphi\|_{C^\alpha(\partial B(0,1))}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\frac{\alpha}{2}} \|\varphi\|_{C^\alpha(\partial B(0,1))}.$$

Supposons maintenant que $d_y \leq d_x \leq |x-y|$. Alors par (4.13) on a

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &\leq |u(x)-u(x_0)| + |u(x_0)-u(x_1)| + \cdots |u(x_n)-u(y_0)| + |u(y_0)-u(y)| \\
&\leq C\left[d_x^{\frac{\alpha}{2}} + |x_0-x_1|^{\frac{\alpha}{2}} + \cdots + |x-y_0|^{\frac{\alpha}{2}} + d_y^{\frac{\alpha}{2}}\right] \|\varphi\|_{C^\alpha(\partial B(0,1))} \\
&\leq C\|x-y|^{\frac{\alpha}{2}} \|\varphi\|_{C^\alpha(\partial B(0,1))}
\end{aligned}$$

puisque $|x_0-y_0| \leq d_x + \sum |x_i - x_{i+1}| + d_y \leq c|x-y|$.

□

4.4 Méthode de l'énergie

La plupart de notre analyse des fonctions harmoniques été basé sur la propriété de la valeur moyenne, la solution fondamentale ou les fonctions de Green. Dans cette dernière section nous allons presenter les méthodes de l'énergie qui sont des techniques impliquant des normes L^2 de certaines expressions.

4.4.1 Unicité

Considérons le problème de valeur au bord

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.14}$$

Nous avons vu que, par le principe du maximum, on a l'unicité. Dans ce suit nous présentons une simple preuve alternative. On suppose que Ω est ouvert borné et que $\partial\Omega$ est C^1.

Théorème 12 ***Unicité.*** *Il existe au plus une solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de (4.14).*

Preuve. Si v est une autre solution soit $w := u - v$. Alors $\Delta w = 0$ dans Ω et $w = 0$ sur $\partial\Omega$. En intégrant par parties on a

$$0 = -\int_\Omega w\Delta w\, dx = \int_\Omega |Dw|^2\, dx.$$

D'où $Dw = 0$ dans Ω et puisque $w = 0$ sur $\partial\Omega$ alors $w = 0$ dans Ω. □

4.4.2 Le principe de Dirichlet

Dans cette section nous montrons qu'une solution du problème valeur au bord (4.14) peut être caractérisé comme un minimiseur d'une fonctionnelle judicieusement choisie. Pour cela on définie l'énergie

$$I(w) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|Dw|^2 + wf\right] dx,$$

w étant dans l'ensemble des éléments admissibles

$$\mathcal{A} := \{w \in C^2(\overline{\Omega}); \qquad w = \varphi \text{ on } \partial\Omega\}.$$

Théorème 13 ***Le principe de Dirichlet.*** *Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ une solution de (4.14). Alors*

$$I(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} I(w). \tag{4.15}$$

Réciproquement, si $u \in \mathcal{A}$ vérifie (4.15) alors u est solution du problème (4.14).

Preuve. Soit $w \in \mathcal{A}$. Par (4.14) on a

$$0 = \int_\Omega (\Delta u - f)(u - w)\, dx,$$

et donc, comme $u - w = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$0 = \int_\Omega [Du \cdot D(u - w) + f(u - w)]\; dx$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[|Du|^2 + uf\right]\; dx &= \int_\Omega [Du \cdot Dw + wf]\; dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dw|^2\, dx + \int_\Omega fw\, dx.
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $w \in \mathcal{A}$ on $I(u) \leq I(w)$.
Réciproquement, soient u vérifiant (4.15) et $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pour $t \in \mathbb{R}$ soit

$$i(t) := I(u + tv).$$

Puisque la fonction i admet un minimum en zéro, on a $i'(0) = 0$, si jamais la dérivée existe. Un simple calcul montre

$$\begin{aligned}
i(t) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|D(u + tv)|^2 + (u + tv)f\right]\; dx \\
&= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|Du|^2 + tDu \cdot Dv + \frac{t^2}{2}|Dv|^2 + (u + tv)f\right]\; dx.
\end{aligned}$$

Donc i est dérivable et

$$0 = i'(0) = \int_\Omega [Du \cdot Dv + vf]\; dx = \int_\Omega (\Delta u - f)v\, dx$$

pour toute fonction $v \in \mathcal{D}$. Ainsi $\Delta u = f$ dans Ω. $\square$

Chapitre 5

Solutions faibles

Nous allons étudier dans ce chapitre le problème valeur au bord

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Ici L est un opérateur différentiel du second ordre ayant ou bien la forme (divergence)

$$Lu := \sum_{1\leq i,j\leq N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{1\leq i\leq N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \tag{5.2}$$

ou bien la forme (non divergence)

$$Lu := \sum_{1\leq i,j\leq N} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{1\leq i\leq N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \tag{5.3}$$

où les coefficients $a_{i,j}$,b_i,c $(i,j = 1,\cdots,N)$.

Remarque 17 *Si les coefficients $a_{i,j}$ sont C^1 alors un opérateur sous la forme divergence peut être écrit sous la forme non divergence et vice versa.*

La forme divergence est plus naturelle pour les méthodes de l'énergie, tandis que la forme non divergence est plus appropriée pour les techniques du principe du maximum.

Dans la suite on suppose que les coefficients a_{ij} sont symétriques.

Définition 10 *On dit que l'opérateur L est uniformément elliptique s'il existe une constante $\mu > 0$ tel que*

$$\sum_{1\leq i,j\leq N} -a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2 \tag{5.4}$$

pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Remarque 18 *Ellipticité veut dire que pour tout $x \in \Omega$, la matrice symétrique $A(x) := (-a_{i,j}(x))$ est définie positive avec une plus petite valeur propre supérieure ou égale à μ.*

5.1 Préliminaires

Dans cette section nous allons introduire le concept des solutions faibles ainsi que quelques résultats les concernant.

Dans ce qui suit L est un opérateur différentiel sous la forme divergence (5.2). On suppose que les coefficients $a_{i,j}$,b_i et c sont $L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$.

Comment définir une solution faible? si u est une solution régulière, en multipliant par une fonction test $v \in \mathcal{D}$ puis après intégration par parties, on obtient

$$\int_\Omega \sum_{1\leq i,j\leq N} \left[-a_{i,j} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{1\leq i\leq N} b_i u_{x_i} v + cuv \right] dx = \int_\Omega fv\, dx. \tag{5.5}$$

Noter que le terme sur le bord a disparu, puisque $u = 0$ sur le bord. En utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, et par approximation, l'expression précédente est vraie pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.
Remarquer que dans l'expression précédente u a seulement besoin d'être différentiable. Plus exactement, il suffit seulement que le produit $u_{x_i} v_{x_j}$ soit dans $L^2(\Omega)$ pour tout i,j, en d'autre termes, il suffit que u soit dans $H_0^1(\Omega)$.

On définie la forme bilinéaire associée à L par

$$B(u,v) := \int_\Omega \sum_{1\leq i,j\leq N} \left[-a_{i,j} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{1\leq i\leq N} b_i u_{x_i} v + cuv \right] dx \tag{5.6}$$

pour $u,v \in H_0^1(\Omega)$.

Définition 11 *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème valeur au bord (5.1) si*

$$B(u,v) = (f,v)_{L^2} \tag{5.7}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Remarque 19 *Comment résoudre un problème valeur au bord non nulle? Considérons le problème*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.8}$$

Si φ est la trace d'une fonction $w \in H^1$, alors on prend $\tilde{u} := u - w \in H_0^1$ et $\tilde{u}$ est solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} L\tilde{u} = \tilde{f} & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\tilde{f} := f - Lw \in H^{-1}(\Omega)$.

Dans ce qui suit nous allons donner quelques théorèmes d'existence. On commence par rappeler le Lemme de Lax-Milgram.

Théorème 14 ***(Lax-Milgram).*** *Soit H un espace de Hilbert réel. Supposons que $B\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire pour laquelle il existe deux constantes $\alpha,\beta > 0$ telles que*

$$|B(u,v)| \leq \alpha \|u\| \, \|v\| \qquad (u,v \in H) \tag{5.9}$$

$$\beta \|u\|^2 \leq |B(u,u)| \qquad (u \in H). \tag{5.10}$$

Alors, pour tout $F \in H^*$, il existe un unique élément $u \in H$ tel que

$$B(u,v) =< F,v >$$

pour tout $v \in H$.

Dans ce qui suit nous allons montrer que la forme linéaire définie par (5.6) vérifie les hypothèse Lemme de Lax-Milgram.

Théorème 15 ***(Estimation de l'énergie).*** *Il existe trois constantes $\alpha,\beta > 0$ et $\gamma \geq 0$ telles que*

$$|B(u,v)| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq |B(u,u)| + \gamma \|u\|_{L^2}^2$$

pour tous $u,v \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \sum_{1 \leq i,j \leq N} \|a_{i,j}\|_{L^\infty} \int_\Omega |Du| \, |Dv| \, dx \\
&\quad \sum_{i=1}^{N} \|b_i\|_{L^\infty} \int_\Omega |Du| \, |v| \, dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega |u| \, |v| \, dx \\
&\leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

pour une certaine constante α.
D'un autre coté, par l'hypothèse de l'ellipticité (5.4) on a

$$\begin{aligned}
\mu \int_\Omega |Du|^2 \, dx &\leq \int_\Omega \sum_{1 \leq i,j \leq N} -a_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} \, dx \\
&= B(u,u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} b_i u_{x_i} u \, dx - \int_\Omega c u^2 \, dx \\
&\leq B(u,u) + \sum_{i=1}^{N} \|b_i\|_{L^\infty} \int_\Omega |Du| \, |u| \, dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega u^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant l'inégalité de Cauchy[1], on a ($\varepsilon > 0$)

$$\int_\Omega |Du|\,|u|\,dx \leq \varepsilon \int_\Omega |Du|^2\,dx + \frac{1}{4\epsilon}\int_\Omega u^2\,dx.$$

En choisissant ε petit tel que

$$\varepsilon \sum_{1\leq i\leq N} \|b_i\|_{L^\infty} < \frac{\mu}{2},$$

on obtient

$$\frac{\mu}{2}\int_\Omega |Du|^2\,dx \leq B(u,u) + C\int_\Omega u^2\,dx$$

pour une certaine constante C. Il suffit maintenant d'utiliser l'inégalité de Poincaré afin d'obtenir la deuxième inégalité. $\square$

Comme conséquence

Théorème 16 ***(Existence).*** *Il existe une constante $\gamma \geq 0$ telle que pour tout $\mu \geq \gamma$ et toute fonction $f \in L^2(\Omega)$ il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème au bord*

$$\begin{cases} -Lu + \mu u = f & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.11}$$

Preuve. En utilisant la constante γ du dernier théorème et pour tout $\mu \geq \gamma$ on définit la forme bilinéaire, pour tout $u,v \in H_0^1(\Omega)$

$$B_\mu(u,v) := B(u,v) + \mu(u,v)_{L^2},$$

et la forme linéaire continue

$$F(v) := (f,v)_{L^2}$$

qui est continue sur L^2 et donc sur H_0^1. Par le lemme de Lax-Milgram il existe une unique fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$B_\mu(u,v) = (f,v)$$

pour toute $v \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

Exemples. Dans le cas où $L = \Delta$, prendre $B(u,v) := \int Du \cdot Dv\,dx$, et par l'inégalité de Poincaré le théorème 15 est vrai avec $\gamma = 0$.
Il en est de même pour l'opérateur L sous la forme de divergence (5.2) à condition que $c \geq 0$ dans Ω.

1. $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$ pour $a,b > 0$ et $\varepsilon > 0$.

Remarque 20 *Comme pour le cas de l'opérateur de Laplace, on peut montrer que l'opérateur L est positif auto-adjoint, dont l'inverse est compact. D'où le spectre de L est une suite croissante de valeurs positives (λ_n) qui tend vers l'infini. Pour plus de détail voir [5, Section 5.6] en particulier les Théorème 5.6.1 et Corollaires 5.6.2 et 5.6.3.*

Comme conséquence sur le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -Lu = \lambda u + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.12}$$

on a:

Théorème 17 *Soit $\lambda \notin (\lambda_n)$. Alors*

1. *Le problème de Dirichlet précédent admet une unique solution faible pour tout $f \in L^2(\Omega)$.*
2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in L^2(\Omega)$ on a*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $u \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution faible du problème (5.12). Cette constante dépend uniquement de λ, Ω et les coefficients de L.

5.2 Principes du maximum

Supposons Ω un domain (ouvert borné connexe) de $\mathbb{R}^N$ et on considère l'opérateur L sous la forme (non divergence)

$$Lu := \sum_{1\leq i,j\leq N} a_{i,j}(x)D_{ij}u + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_iu + c(x)u$$

pour $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. On suppose que les coefficients sont continues sur $\overline{\Omega}$ (et donc bornés) et que L est uniformément elliptique dans Ω:

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2,$$

pour tous $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ et une certaine constante positive μ.

Lemme 9 *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant $Lu > 0$ dans Ω avec $c(x) \leq 0$ dans Ω. Si u admet un maximum positif dans $\overline{\Omega}$, alors u ne peut pas atteindre ce maximum dans Ω.*

Preuve. Supposons que u atteint son maximum positif dans $\overline{\Omega}$ en $x_0 \in \Omega$. Alors $Du(x_0) = 0$ et la matrice $B := (D_{i,j}(x_0))$ est semi-définie négative. Par la condition d'ellipticité la matrice $A := (a_{i,j}(x_0))$ est définie positive. Ainsi la matrice AB est semi-définie négative avec une trace négative, i.e. $\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)D_{ij}u(x_0) \leq 0$. Or cela implique que $Lu(x_0) \leq 0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. □

Remarque 21 *si $c(x) \equiv 0$, alors l'hypothèse de positivité du maximum peut être omis. Cette remarque est valable pour le reste de la section.*

Théorème 18 ***Principe du maximum faible.*** *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant $Lu \geq 0$ dans Ω avec $c(x) \leq 0$ dans Ω. Alors u atteint sur $\partial\Omega$ son maximum positif dans $\overline{\Omega}$.*

Preuve. Pour $\varepsilon > 0$, soit $w(x) := u(x) + \varepsilon e^{\alpha x_1}$ (α à déterminer). Alors on a

$$Lw = Lu + \varepsilon e^{\alpha x_1}[a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha + c].$$

Puisque b_1 et c sont bornées et $a_{11}(x) \geq \mu > 0$, alors, en choisissant $\alpha > 0$ assez grand, on obtient

$$a_{11}(x)\alpha^2 + b_1(x)\alpha + c(x) > 0$$

pour tout $x \in \Omega$. On obtient alors $Lw > 0$ dans Ω. Par le lemme 9, w atteint son maximum positif sur $\partial\Omega$:

$$\sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+.$$

Alors on obtient

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+ \leq \sup_{\partial\Omega} u + \varepsilon \sup_{x\in\partial\Omega} e^{\alpha x_1}.$$

On termine la preuve en faisant tendre $\varepsilon \to 0$. □

Comme application on obtient l'unicité de la solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ du problème (5.8) si $c(x) \leq 0$ dans Ω.

Remarque 22 *La bornitude du domain Ω est essentiel, puisque cela garantit l'existence du maximum et du minimum sur $\overline{\Omega}$. Nous avons déjà vu que l'unicité n'est pas vrai dans le cas où Ω est non borné. Aussi le signe de c est important.*

Exemple. Soit $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x,y < \pi\}$. alors $u := \sin x \sin y$ est solution non triviale du problème

$$\begin{cases} \Delta u + 2u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Théorème 19 ***(Lemme de Hopf).*** *Soient B une boule ouverte dans $\mathbb{R}^N$ avec $x_0 \in \partial B$ et $u \in C^2(B) \cap C(B \cup \{x_0\})$ vérifiant $Lu \geq 0$ dans B avec $c(x) \leq 0$ dans B. Supposons aussi que $u(x) < u(x_0)$ pour tout $x \in B$ et $u(x_0) \geq 0$. Alors pour tout vecteur ν sortant en x_0 avec $\nu \cdot n(x_0) > 0$ on a*

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{1}{t}[u(x_0) - u(x_0 - t\nu)] > 0.$$

Preuve. On peut supposer que $B = B(0,r)$. On suppose aussi que $u \in C(\overline{B})$ et que $u(x) < u(x_0)$ pour tout $x \in \overline{B} \backslash \{x_0\}$ (puisque on peut construire une boule B_1 tangente à B en x_0 avec $B_1 \subset B$).

Soit $v(x) := u(x) + \varepsilon h(x)$ pour une certaine fonction positive h, $\varepsilon > 0$ choisit telle que v atteint son maximum positif seulement en x_0. Notons $\Sigma := B \cap B(x_0,\frac{r}{2})$. Soit $h(x) := e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha r^2}$ avec $\alpha > 0$ à determiner. Montrons que $Lh > 0$ dans Σ. Par un calcul direct on a

$$\begin{aligned} Lh &= e^{-\alpha|x|^2}\left[4\alpha^2 \sum_{i,j} a_{ij}(x)x_ix_j - 2\alpha \sum_i a_{ij}(x) - 2\alpha \sum_i b_i(x)x_i + c\right] - ce^{\alpha r^2} \\ &\geq e^{-\alpha|x|^2}\left[4\alpha^2 \sum_{i,j} a_{ij}(x)x_ix_j - 2\alpha \sum_i (a_{ij}(x) + b_i(x)x_i) + c\right] \end{aligned}$$

Par ellipticité on a

$$\sum_{ij} a_{ij}(x)x_ix_j \geq \mu|x|^2 \geq \mu r^2/4 > 0 \text{ dans } \Sigma.$$

Ainsi pour α assez grand $Lh > 0$ dans Σ. D'où $Lv = Lu + \varepsilon Lh > 0$ dans Σ pour tout $\varepsilon > 0$. Par le lemme 9, v ne peut pas atteindre son maximum positif dans Σ.

Montrons maintenant que pour $\varepsilon > 0$ petit, v atteint son maximum positif en x_0. Pour cela on regarde v sur la frontière $\partial\Sigma$.

- Pour $x \in \partial\Sigma \cap B$, comme $u(x) < u(x_0)$, alors $u(x) < u(x_0) - \delta$ pour un certain $\delta > 0$. Prendre $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon h < \delta$ sur $\partial\Sigma \cap B$. alors on obtient $v(x) < u(x_0)$ pour $x \in \partial\sigma \cap B$.
- sur $\Sigma \cap \partial B$, $h(x) = 0$ et $u(x) < u(x_0)$ pour $x \neq x_0$. Alors $v(x) < u(x_0)$.

On conclut que pour $t > 0$ petit on a

$$\frac{v(x_0) - v(x_0 - t\nu)}{t} \geq 0.$$

En faisant tendre $t \to 0$ on obtient

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{1}{t}[u(x_0) - u(x_0 - t\nu)] \geq -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial \nu}(x_0).$$

Par définition de h on a $\partial h/\partial \nu(x_0) < 0$. $\square$

Remarque 23 *Si de plus $u \in C^1(B \cup \{x_0\})$ alors*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Théorème 20 ***(Principe du maximum fort).*** *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant $Lu \geq 0$ avec $c(x) \leq 0$ dans Ω. Alors le maximum positif de u dans $\overline{\Omega}$ peut être considéré seulement sur le bord $\partial\Omega$ sauf si u est constante.*

Preuve. Soit M le maximum positif de u dans $\overline{\Omega}$ et soit $\sigma := \{x \in \Omega;\ u(x) = M\}$. σ est fermé dans Ω. Supposons que $\sigma \neq$ et montrons que $\sigma = \Omega$. Sinon, il existe une boule ouverte $B \subset \Omega \backslash \sigma$ avec un point sur sa frontière appartenant à σ. Pour voir cela, on choisit un point $p \in \Omega\backslash\sigma$ tel que $d(p,\sigma) < d(p,\partial\Omega)$ puis on étend cette boule jusqu'à qu'elle touche σ (avant $\partial\Omega$. Soit $x_0 \in \partial B \cap \sigma$. On a visiblement $Lu \geq 0$ dans B, $u(x_0) = M$ et $u(x) < u(x_0)$ pour $x \in B$. Le théorème 19 montre que $\partial u/\partial n(x_0) > 0$ où n est est un vecteur normal sortant en x_0 à la boule. Mais x_0 est un point intérieur maximum, D'où la contradiction. □

Corollaire 7 ***(Principe de comparaison).*** *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant $Lu \geq 0$ dans Ω avec $c(x) \leq 0$ dans Ω. Si $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq 0$ dans Ω. De plus ou bien $u < 0$ dans Ω ou bien $u \equiv 0$ dans Ω.*

Corollaire 8 *Supposons que Ω admet la propriété de "sphère intérieure" et $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ vérifiant $Lu \geq 0$ dans Ω avec $c(x) \leq 0$ dans Ω. Supposons que u atteint son maximum positif en $x_0 \in \overline{\Omega}$. Alors $x_0 \in \partial\Omega$ et pour tout vecteur sortant ν en x_0 on a*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

sauf si u est constante dans $\overline{\Omega}$.

Le résultat suivant donne le principe du maximum général sans restriction sur $c(x)$.

Théorème 21 *Supposons qu'il existe $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ vérifiant $w > 0$ dans $\overline{\Omega}$ et $Lw \leq 0$ dans Ω. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ vérifiant $Lu \geq 0$ dans Ω, alors $\frac{u}{w}$ ne peut pas atteindre dans Ω son maximum positif sauf si $\frac{u}{w} \equiv$const. Si de plus, $\frac{u}{w}$ atteint son maximum positif en $x_0 \in \partial\Omega$ et $\frac{u}{w} \not\equiv$const, alors pour tout vecteur ν sortant en x_0 on a*

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{u}{w}\right)(x_0) > 0$$

si Ω admet la propriété de la "sphère intérieure".

Preuve. Soit $v := \frac{u}{w}$. Alors v vérifie

$$\sum_{ij} a_{ij} D_{ij} v + \sum_i B_i D_i v + \left[\frac{Lw}{w}\right] v \geq 0$$

où $B_i = b_i + \frac{2}{w} a_{ij} D_{ij} w$. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 20 et le Corollaire 8 à v. □

Remarque 24 *Si un opérateur L dans Ω satisfait la condition du théorème 21, alors L vérifie le principe de comparaison. En particulier, le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \textit{dans } \Omega \\ u = \varphi & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.13}$$

admet au plus une solution.

5.3 Régularité

Dans cette section on s'intéresse à la question de la régularité des solutions faibles d'une équation elliptique de type

$$Lu = f \qquad \text{dans } \Omega. \tag{5.14}$$

5.3.1 Motivation

Considérons le problème

$$-\Delta u = f \qquad dans \mathbb{R}^N. \tag{5.15}$$

Afin de justifier le calcul suivant on suppose que u est régulière et s'annule rapidement à l'infini. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} [\Delta u]^2\,dx = \sum_{1\leq i,j\leq N} \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_ix_i} u_{x_jx_j}\,dx \\ &= -\sum_{1\leq i,j\leq N} \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_ix_ix_j} u_{x_j}\,dx \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq N} \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_ix_j} u_{x_ix_j}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |D^2u|^2\,dx. \end{aligned} \tag{5.16}$$

En d'autres termes $\|f\|_{L^2} = \|D^2u\|_{L^2}$. D'une façon similaire, en dérivant l'équation (5.15) on obtient

$$-\Delta u_k = f_k,$$

où $u_k := u_{x_k}$ et $f_k := f_{x_k}$ pour $k = 1,\cdots,N$. En répétant le calcul précédent on peut estimer la norme L^2 de la troisième dérivée de u en fonction de la première dérivée de f. En continuant, on voit que la norme L^2 de la dérivée $m+2$ de u peut être contrôlé par la norme L^2 de la dérivée m de f, $m = 0,\cdots$.

Ces calculs indiquent que $f \in H^m$ implique $u \in H^{m+2}$, ou bien u admet deux dérivées de plus dans L^2 que f. Bien sûr pour ce calcul on a supposé que u est régulière ($u \in C^3$).

Cependant dans la suite nous allons utiliser l'analyse des différences finies. Nous allons commencer par donner quelques résultats sur ces différences finies. La preuve sera laissée à titre d'exercices.

5.3.2 Différences finies

Soit $u: \Omega \mapsto \mathbb{R}$ a locally integrable function and $V \subset\subset \Omega$.

Définition 12 *On définie pour $k \in \{1,\cdots,N\}$ et $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, $|h| < dist(V,\partial\Omega)$*

$$d_k^h u(x) := \frac{u(x+he_k) - u(x)}{h}$$

et

$$d^h u := (d_1^h u,\cdots,d_N^h u).$$

Théorème 22
1. *Pour tout $p \in [1,\infty)$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$ alors pour tout $V \subset\subset \Omega$*
$$\|d^h u\|_{L^p(V)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}$$
pour une certaine constante C et tout $0 < |h| < \frac{1}{2}dist(V,\partial\Omega)$.
2. *Supposons que $p \in (1,\infty)$, $u \in L^p(V)$ et pour tout $0 < |h| < \frac{1}{2}dist(V,\partial\Omega)$, $\|d^h u\|_{L^p(V)} \leq C$ pour une certaine constante C. Alors $u \in W^{1,p}(V)$ et $\|Du\|_{L^p(V)} \leq C$.*

5.3.3 Théorèmes d'injection de Sobolev

Dans cette sous-section on suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière est de classe C^1. On note, pour $1 \leq p < N$, le conjugué de Sobolev de p par

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Noter que $p^* > p$ et $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
On donne maintenant le théorème d'injection de Sobolev.

Théorème 23

$$W^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & \text{pour } p < N, \\ C^0(\overline{\Omega}) & \text{pour } p > N. \end{cases}$$

De plus, pour $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{array}{ll} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)} & \text{pour } p < N, \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}}\|Du\|_{L^p(\Omega)} & \text{pour } p > N. \end{array}$$

Corollaire 9

$$W^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{pN}{N-kp}}(\Omega) & \text{pour } kp < N, \\ C^m(\Omega) & \text{pour } 0 \leq m < k - \frac{N}{p}. \end{cases}$$

Corollaire 10 *Si* $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ *pour un certain* p *et tout* $k \in \mathbb{N}$*, alors* $u \in C^\infty(\Omega)$.

5.3.4 Régularité intérieure

Dans ce qui suit $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible de l'équation (5.14), où L est sous la forme divergence.

Théorème 24 ***Régularité*** $\mathbf{H^2}$ ***intérieure***
Supposons que $a_{i,j} \in C^1(\Omega)$, $b_i,c \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leq i,j \leq N$ *et* $f \in L^2(\Omega)$*. Alors la solution faible* $u \in H^1(\Omega)$ *de l'équation (5.14) vérifie* $u \in H^2_{loc}(\Omega)$*; et pour tout ouvert relativement compact* V *dans* Ω *on a*

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)},\right] \tag{5.17}$$

où la constante C *dépend seulement de* Ω,V *et les coefficients de* L.

Remarque 25 *Noter que* $u \in H^1$ *et non* H_0^1*, car on ne suppose pas nécessairement que* $u = 0$ *au bord.*

Remarque 26 *Noter que puisque* $u \in H^2_{loc}$*, on a*

$$Lu = f \qquad \text{presque partout dans } \Omega.$$

En fait, puisque pour tout $v \in \mathcal{D}$*, on a*

$$B(u,v) = (f,v)_{L^2}.$$

Puisque $u \in H^2_{loc}$ *en intégrant par parties on obtient*

$$B(u,v) = (Lu,v)_{L^2}.$$

Donc $(Lu - f,v)_{L^2} = 0$ *pour tout* $v \in \mathcal{D}$*, i.e.* $Lu = f$ *presque partout.*

Dans ce qui suit, en itérant l'argument précédent, on obtient une régularité intérieure supérieure.

Théorème 25 *Soit m un entier positif et supposons que $a_{i,j},b_i,c \in C^{m+1}(\Omega)$, $f \in H^m(\Omega)$. Alors la solution faible $u \in H^1(\Omega)$ de l'équation (5.14) vérifie $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$; et pour tout ouvert relativement compact V dans Ω on a*

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C\left[\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)},\right] \tag{5.18}$$

où la constante C dépend seulement de m,Ω,V et les coefficients de L.

En répétant le théorème précédent pour tout entier $m \geq 0$ on obtient la régularité de la solution.

Théorème 26 *Supposons que $a_{i,j},b_i,c \in C^\infty(\omega)$, $1 \leq i,j \leq N$ et $f \in C^\infty(\Omega)$. Alors la solution faible $u \in H^1(\Omega)$ de l'équation (5.14) est de classe C^∞.*

Preuve. En appliquant le théorème 25 on a $u \in H^m_{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout entier $m = 1,2,\cdots$. On en déduit que $u \in C^k(\Omega)$ pour tout $k = 1,2\cdots$. □

5.3.5 Régularité au bord

On étend maintenant les estimations de la sous section précédente pour étudier la régularité de la solution faible jusqu'à la frontière.

Théorème 27 ***Régularité* $\mathbf{H^2}$ *au bord***
Supposons que $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b_i,c \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leq i,j \leq N$, $f \in L^2(\Omega)$ et que $\partial\Omega$ est de classe C^2. Alors toute solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$ du problème

$$\begin{cases} Lu = f & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.19}$$

vérifie $u \in H^2(\Omega)$; et on a

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)},\right] \tag{5.20}$$

où la constante C dépend seulement de Ω et les coefficients de L.

Remarque 27 *Si nous avons l'unicité, en utilisant Théorème 17, l'inégalité (6.13) devient*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 28 *Noter que, en comparaison avec le Théorème34, ici on suppose que $u = 0$ au bord.*

Théorème 28 *Soit m un entier positif et supposons que* $a_{i,j},b_i,c \in C^{m+1}(\overline{\omega})$, $1 \leq i,j \leq N$, $f \in L^2(\Omega)$ *et que* $\partial\Omega$ *est de classe* C^{m+2}. *Alors toute solution faible* $u \in H_0^1(\Omega)$ *du problème (6.12) vérifie* $u \in H^{m+2}(\Omega)$; *et on a*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\left[\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)},\right] \tag{5.21}$$

où la constante C *dépend seulement de* Ω *et les coefficients de* L.

Remarque 29 *Si nous avons l'unicité, en utilisant Théorème 17, l'inégalité (5.21) devient*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Théorème 29 *Supposons que* $a_{i,j},b_i,c \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq N$ *et* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *et que* $\partial\Omega$ *est de classe* C^∞. *Alors toute solution faible* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de l'équation (6.12) est de classe* $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Preuve. En appliquant le théorème 27 on a $u \in H^m(\Omega)$ pour tout entier $m = 1,2,\cdots$. Par les injections de Sobolev, on en déduit que $u \in C^k(\Omega)$ pour tout $k = 1,2\cdots$. □

5.4 Estimations à priori et du gradient

Dans cette section nous donnons les estimations à priori et du gradient. On suppose que L est sous la forme de non divergence et on note Λ une norme sup des a_{ij} et b_i:

$$\max_{i,j,\Omega}|a_{ij}| + \max_{i,\Omega}|b_i| \leq \Lambda.$$

Proposition 16 *Soit* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *une solution de*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour une certaine fonction $f \in C(\overline{\Omega})$ *et* $\varphi \in C(\partial\Omega)$. *Si* $c(x) \leq 0$ *alors pour tout* $x \in \Omega$ *on a*

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega}|\varphi| + C\max_{\Omega}|f| \quad (x \in \Omega)$$

où C *est une constante positive qui dépend seulement de* μ, Λ *et diam*(Ω).

Preuve. On va construire une fonction w telle que

(i) $L(w \pm u) = Lw \pm f \leq 0$, ou bien $Lw \leq \mp f$ dans Ω.

(ii) $w \pm u = w \pm \varphi \geq 0$, ou bien $w \geq \mp\varphi$ sur $\partial\Omega$.

Notons $F := \max_\Omega |f|$ et $\Phi := \max_{\partial\Omega} |\varphi|$. On a besoin de $Lw \leq -F$ dans Ω et $w \geq \Phi$ sur $\partial\Omega$. Supposons que le domaine Ω est dans l'ensemble $0 < x_1 < d$ pour une constante positive d. soit $w := \Phi + F[e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}]$ avec $\alpha > 0$ à déterminer. Alors on a

$$\begin{aligned} -Lw &= [a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha]Fe^{\alpha x_1} - c\Phi - cF[e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}] \\ &\geq [a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha]F \geq [\mu\alpha^2 + b_1\alpha]F \geq F \end{aligned}$$

si on choisit α assez grand tel que $\alpha^2\mu + b_1(x)\alpha \geq 1$ pour tout $x \in \Omega$. w vérifie (i) et (ii). Par le corollaire 7 (le principe de comparaison) on conclut $-w \leq u \leq w$ dans Ω, en particulier

$$\sup_\Omega |u| \leq \Phi + F[e^{\alpha d} - 1]$$

où α est une constante positive qui dépend seulement de μ et Λ. □

La proposition suivante est une généralisation du résultat précédent au cas "conditions au bord mixte".

Proposition 17 *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ une solution de*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où n est la normale sortante à $\partial\Omega$. Si $c(x) \leq 0$ dans Ω et $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ sur $\partial\Omega$, alors on a

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \max_\Omega |f| \quad (x \in \Omega)$$

où C est une constante positive qui dépend seulement de μ, Λ, α_0 et diam(Ω).

Preuve. 1- Si $c(x) \leq -c_0 < 0$ et montrons que $u \leq \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\Phi$. Soit $v := \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\Phi \pm u$. $Lv = c[\frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\Phi] \pm f \leq 0$ dans Ω et $\frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v = \alpha[\frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\Phi] \pm \phi \geq 0$. Si v admet un maximum négative dans $\overline{\Omega}$ il est atteint en $x_0 \in \partial\Omega$ (principe du maximum) donc $\frac{\partial v}{\partial n} \leq 0$ et donc $\frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v \leq \alpha v(x_0) < 0$ contradiction. Alors $v \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$ et donc $|u| \leq \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\Phi$.
2- Si $c(x) \leq 0$. Soit $u(x) = z(x)w(x)$, $z > 0$ à déterminer. Alors on a

$$\begin{cases} \sum a_{ij}D_{ij}w + \sum B_iD_iw + \left[c + \frac{1}{z}\sum a_{ij}D_{ij}z + \frac{1}{z}\sum b_iD_iz\right]w = \frac{f}{z} & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} + \left[\alpha(x) + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial n}\right]w = \frac{\varphi}{z} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $B_i = b_i + \frac{1}{z}\sum_j[a_{ij} + a_{ji}]D_jz$. On va choisir $z > 0$ dans $\overline{\Omega}$ tel que le nouveau c soit comme dans 1. i.e. tel que $\left[c + \frac{1}{z}\sum a_{ij}D_{ij}z + \frac{1}{z}\sum b_iD_iz\right] \leq c_0(\lambda,\Lambda,\alpha_0) < 0$ et $\alpha + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial n} \geq \frac{1}{2}\alpha_0$, ou bien

$$\begin{cases} \frac{1}{z}\sum a_{ij}D_{ij}z + \frac{1}{z}\sum b_iD_iz \leq -c_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial n} \leq \frac{1}{2}\alpha_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Supposons $\Omega \subset \{0 < x_1 < d\}$ et prendre $z(x) := A + e^{\beta d} - e^{\beta x_1}$ A et β à déterminer. On a

$$-\frac{1}{z}\sum a_{ij}D_{ij}z-\frac{1}{z}\sum b_iD_iz = \frac{[\beta^2 a_{11} + \beta b_1]e^{\beta x_1}}{z} \geq \frac{[\beta^2 a_{11} + \beta b_1]e^{\beta x_1}}{A + e^{\beta d}} \geq \frac{1}{A + e^{\beta d}}$$

si β grand tel que $\beta^1 a_{11} + \beta b_1 \geq 1$. Et

$$\left|\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial n}\right| \leq \frac{1}{A}\beta e^{\beta d} \leq \frac{1}{2}\alpha_0$$

pour A grand. On applique alors le premier cas pour obtenir le résultat pour w et donc pour u. □

Nous allons terminer cette section par deux résultats de type “estimations du gradient”. L'idée de base, dû à Bernstein, est différentier l'équation par rapport à x_k, $1 \leq k \leq N$, multiplier ensuite l'équation par $D_k u$ et sommer sur k. En appliquant le principe du maximum à la fonction $v = |Du|^2$ on obtient les estimations recherchées. Dans la littérature il existe deux type d'estimations du gradient: globales et intérieures. A noter enfin que nous allons traiter des équations semi-linéaires.

Soit Ω un domaine borné et connexe de $\mathbb{R}^N$. On considère l'équation

$$\sum_{1\leq i,j\leq N} a_{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{1\leq i\leq N} b_i(x)D_iu = f(x,u) \quad \text{in } \Omega. \tag{5.22}$$

On va considérer $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$, et l'on suppose que les a_{ij} et les b_i sont continues et donc bornées sur $\overline{\Omega}$. On suppose finalement que l'opérateur est uniformément elliptique dans Ω, dans le sens que

$$\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et pour une certaine constante positive.

Proposition 18 *Soit $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ vérifiant (5.22) dans Ω où les $a_{ij}, b_i \in C^1(\overline{\Omega})$ et $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$. Alors on a*

$$\sup_{\Omega} |Du| \leq \sup_{\partial\Omega} |Du| + C$$

où C est une constante positive qui dépend seulement de μ, $|a_{ij}|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $|b_i|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $M := |u|_{L^\infty}$, $|f|_{C^1(\overline{\Omega}\times[-M,M])}$ et diam(Ω).

Preuve. Soit $L := \sum_{1\leq i,j\leq N} a_{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{1\leq i\leq N} b_i(x)D_iu$. Calculons d'abord $L(|Du|^2)$. Noter que

$$D_i(|Du|^2) = D_i\left(\sum_k |D_ku|^2\right) = \sum_k 2D_kuD_{ik}u$$

et donc

$$D_{ij}(|Du|^2) = \sum_k 2D_{ki}uD_{kj}u + 2D_kuD_{kij}u. \tag{5.23}$$

En dérivant (5.22) par rapport à x_k, en multipliant ensuite par D_ku puis en faisant la somme sur k on obtient (en utilisant (5.23))

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} a_{ij}D_{ij}(|Du|^2) + \sum_i b_iD_i(|Du|^2) &= 2\sum_{i,j} a_{ij}D_{ki}uD_{kj}u - 2\sum_{i,j} D_ka_{ij}D_kuD_{ij}u \\ &\quad -2\sum_i D_kb_iD_kuD_iu + +2D_kf|Du|^2 + 2D_kfD_ku.\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de l'ellipticité on a

$$\sum_{i,j,k} a_{ij}D_{ki}uD_{kj}u \geq \mu|D^2u|^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy (avec $\varepsilon = 2\mu$) on a

$$L(|Du|^2) \geq \mu|D^2u|^2 - C|Du|^2 - C \tag{5.24}$$

où C est comme dans l'énoncé. Toujours par l'hypothèse de l'ellipticité on a

$$L(u^2) = 2\sum_{i,j} a_{ij}D_iuD_ju + 2u\left[\sum_{i,j} D_{ij}u + \sum_i b_iD_iu\right] \geq 2\mu|D^2u|^2 + 2uf.$$

Ainsi on obtient

$$L(|Du|^2 + \alpha u^2) \geq \mu|D^2u|^2 + (2\alpha\mu - C)|Du|^2 - C \geq \mu|D^2u|^2 + |Du|^2 - C$$

pour $\alpha > 0$ grand. Afin de contrôler la constante on considère une autre fonction $e^{\beta x_1}$ avec $\beta > 0$. On obtient alors

$$L(|Du|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}) \geq \mu|D^2u|^2 + |Du|^2 + \left[\beta^2a_{11}e^{\beta x_1} + \beta b_1e^{\beta x_1} - C\right].$$

Si le domain $\Omega \subset \{x_1 > 0\}$ alors $e^{\beta x_1} \geq 1$ pour tout $x \in \Omega$. En choisissant β grand, le dernier terme devient positif. Posons alors $w := |Du|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}$ avec α et β (qui ont les mêmes dependence que C) on obtient $Lw \geq 0$ dans Ω. Par le principe du maximum on obtient

$$\sup_\Omega w \leq \sup_{\partial\Omega} w.$$

$\square$

D'une façon similaire on obtient les estimations intérieure du gradient.

Proposition 19 *Soit $u \in C^3(\Omega)$ vérifiant (5.22) dans Ω où les a_{ij},$b_i \in C^1(\overline{\Omega})$ et $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$. Alors pour tout compact $\Omega' \Subset \Omega$ on a*

$$\sup_{\Omega'} |Du| \leq C$$

où C est une constante positive qui dépend seulement de μ, $|a_{ij}|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $|b_i|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $M := |u|_{L^\infty}$, $|f|_{C^1(\overline{\Omega}\times[-M,M])}$, $dist(\Omega',\partial\Omega)$ et $diam(\Omega)$.

Preuve. Soient $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\chi \geq 0$, $v := \chi u$ et $w := \chi|Du|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}$. Alors

$$Lv = (L\chi)|Du|^2 + \chi L(|Du|^2) + 2\sum_{i,j} a_{ij} D_i\chi D_j|Du|^2.$$

Par l'inégalité (5.24) on

$$Lv \geq \mu\chi|D^2u|^2 + 2\sum_{i,j} a_{ij} D_k u D_i \chi D_{kj} u - C|Du|^2 + (L\chi)|Du|^2 - C.$$

Par l'inégalité de Cauchy on obtient pour tout $\varepsilon > 0$

$$2\sum_{i,j} a_{ij} D_k u D_i \chi D_{kj} u \leq \varepsilon|D\chi|^2|D^2u|^2 + c(\varepsilon)|Du|^2.$$

Si l'on suppose que la fonction χ vérifie

$$|D\chi|^2 \leq C\chi \quad \text{dans } \Omega$$

on obtient en prenant $\varepsilon > 0$ petit

$$Lv \geq \mu\chi|D^2u|^2 \left[1 - \varepsilon\frac{|D\chi|^2}{\chi}\right] - C|Du|^2 - C \geq \frac{1}{2}\mu\chi|D^2u|^2 - C|Du|^2 - C.$$

On peut maintenant reprendre la démonstration de la proposition précédente.
□

Chapitre 6

Solutions des exercices

6.1 Le Laplacien dans un ouvert de $\mathbb{R}^N$: Théorie L^2 et théorie C_0.

Théorie L^2: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $X = L^2(\Omega)$ considéré comme espace de Hilbert réel. On définit l'opérateur A sur X par

$$D(A) := \{u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

$$Au = \Delta u, \qquad u \in D(A).$$

Alors on a

Proposition 20 *$(A,D(A))$ est m-dissipatif de domain dense. De plus A est auto-adjoint négatif.*

Preuve. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(A)$, $D(A)$ est dense dans X. Soit $u \in D(A) \subset H_0^1(\Omega)$, par la formule de Green, on a

$$< Au,u >= \int_\Omega \Delta u \cdot u\, dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

et donc A est dissipatif.
En utilisant le Lemme de Lax-Milgram, pour tout $f \in X$, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int (uv + \nabla u \cdot \nabla v)\; dx = \int fv.$$

Ce qui donne (par Green) qu'au sens des distributions

$$u - \Delta u = f.$$

On voit donc que $(u \in H_0^1)$ $\Delta u = u - f \in L^2$, i.e. $u \in D(A)$. A est m-dissipatif.

A nouveau, par la formule de Green, pour tout $u,v \in D(A)$ on a $< Au,v > = < u,Av >$ et donc $G(A) \subset G(A^*)$. Par 2.3.11, A est auto-adjoint. $\square$

Remarque 30 *Si la frontière de Ω est bornée et de classe C^2, alors $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ avec normes équivalentes (voir [1, théorème IX 25])*

Théorie C_0: Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $Y = L^\infty(\Omega)$. On définit l'opérateur B sur Y par

$$D(B) := \{u \in H_0^1(\Omega) \cap Y, \Delta u \in L^\infty(\Omega)\},$$

$$Bu = \Delta u, \qquad u \in D(B).$$

Alors on a

Proposition 21 *$(B,D(B))$ est m-dissipatif dans $L^\infty(\Omega)$.*

Preuve. 1- B est dissipatif: Soient $\lambda > 0$, $f \in Y$, $M := \|f\|_{L^\infty}$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution de $u - \lambda\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. $L^2 \subset \mathcal{D}'$ et donc $(u-M) - \lambda\Delta(u-M) = f - M$ dans L^2. Posons $v := (u-M)^+ \in H_0^1(\Omega)$, en remarquant que $\nabla v = \chi_{\{|u|>M\}} \nabla u$, on a (Green)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(v^2 + \lambda|\nabla v|^2\right) dx &= \int_\Omega v^2\,dx + \lambda \int_{\{|u|>M\}} |\nabla u|^2\,dx \\
&= \int_\Omega v^2\,dx + \lambda \int_{\{|u|>M\}} |\nabla v|^2\,dx \\
&= \int_{\{|u|>M\}} (f-M)v\,dx \le 0.
\end{aligned}$$

En particulier $\int v^2 \le 0$, donc $v \equiv 0$, i.e. $u \le M$ presque partout sur Ω. De même on montre que $u \ge -M$ p.p. sur Ω. D'où $f \in L^\infty$ et $\|f\|_\infty \le M$, en d'autres termes $\|(I - \lambda B)u\|_\infty \ge \|u\|_\infty$.
2- B est m-dissipatif: Si on reprend le premier point avec $f \in L^\infty \subset L^2$ et $\lambda = 1$. D'après la théorie L^2 il existe $u \in D(A)$ solution de $u - \Delta u = f$ dans L^2, mais on a montré que $u \in L^\infty$ et donc $u \in D(B)$ et $u - Bu = f$. $\square$

Lemme 10 *(voir [3, Théorème 8.30]) Si la frontière de Ω est Lipschitzienne, on a $D(B) \subset C_0(\Omega) := \{u \in C(\overline{\Omega}), u = 0,$ sur $\partial\Omega\}$.*

Ce lemme justifie les changements:
Soit $Z := C_0(\Omega)$, et on définit l'opérateur

$$D(C) := \{u \in Z \cap H_0^1(\Omega), \Delta u \in Z\},$$

$$Cu = \Delta u, \qquad u \in D(C).$$

Proposition 22 *On suppose que la frontière de Ω est Lipschitzienne, alors $(C,D(C))$ est m-dissipatif de domain dense.*

Preuve. $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(C)$ est dense dans Z, donc $D(C)$ est dense dans Z. D'autre part $Z \subset X$ et $G(C) \subset G(B)$. B étant dissipatif, C l'est aussi. Comme B est m-dissipatif, pour tout $f \in Z \subset L^\infty$, il existe $u \in D(B)$ tel que $u - \Delta u = f$. Par le lemme 10, $u \in Z$, i.e. C est m-dissipatif. □

6.2 Réalisations de Dirichlet

Application 1: La réalisation de Dirichlet. Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$ tel que $\overline{\Omega}$ est compact et soit T_0 l'opérateur (non borné) définie dans $H = L^2(\Omega)$ par

$$D(T_0) = C_0^\infty(\Omega)\ ,\ T_0 = -\Delta\ .$$

Il est clair que T_0 est symétrique et positif[1] (donc semi-borné). On considère: $\tilde{T_0} := T_0 + Id$.
Il est facile de voir[2] que V est la clôture dans $H^1(\Omega)$ de $C_0^\infty(\Omega)$. Cela veut dire, au moins si Ω est régulier, que $V = H_0^1(\Omega)$. Le domaine de S est alors décrit comme

$$D(S) := \{u \in H_0^1(\Omega)\ |\ -\Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

S est alors l'opérateur $(-\Delta + 1)$ agissant au sens des distributions.
Lorsque Ω est régulier, un théorème de régularité classique (voir [6]) permet de montrer que

$$D(S) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\ . \tag{6.1}$$

Nous avons montrer le théorème suivant

Théorème 30 *L'opérateur T_1 définie par*

$$D(T_1) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\ ,\ T_1 = -\Delta\ ,$$

est auto adjoint appelé la réalisation de Dirichlet de $-\Delta$ dans Ω.

On a juste besoin d'observer que $T_1 = S - 1$ et d'utiliser le fait que si A est auto adjoint alors, pour tout réel λ, $T + \lambda$ est auto adjoint aussi.
Noter que T_1 est une extension auto adjoint de T_0.

1. On sait même qu'il est strictement positif.
2. On rappelle qu'il y a deux méthodes pour décrire $H_0^1(\Omega)$. Dans la première définition on prend juste la clôture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
Dans la seconde définition, on prend $H_0^1(\Omega)$ comme le sous espace de $H^1(\Omega)$ des distributions dont la trace est zéro sur le bord. Cela suppose que la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ soit régulière. Dans ce cas, il existe une unique application γ_0 continue de $H^1(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ extension des fonctions $C^\infty(\bar{\Omega}) \ni u \mapsto u_\Gamma$. Il est connu que (cf [1] ou [6]) que les deux définitions coïncident, lorsque la frontière est régulière.

Application 2: L'oscillateur harmonique. On commence avec

$$H_0 = -\Delta + |x|^2 + 1 \ ,$$

avec domaine

$$D(H_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \ .$$

En suivant le schéma de la construction de l'extension de Friedrichs, on obtient d'abord que

$$V = B^1(\mathbb{R}^N) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid x_j u \in L^2(\mathbb{R}^N) \ , \forall j \in [1,\cdots,N]\} \ .$$

En fait, commencer par montrer que $V \subset B^1(\mathbb{R}^N)$ et puis obtenir l'égalité en montrant la propriété que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $B^1(\mathbb{R}^N)$. Ainsi on obtient que le domaine de S comme

$$D(S) = \{u \in B^1(\mathbb{R}^N) \mid (-\Delta + |x|^2 + 1)u \in L^2(\mathbb{R}^N)\} \ .$$

Par un théorème de régularité (differential quotients method [6]), on peut montrer que

$$D(S) = B^2(\mathbb{R}^N) := \{u \in H^2(\mathbb{R}^N) \mid x^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N) \ , \forall \alpha \text{ t. q. } |\alpha| \leq 2\}.$$

6.3 Fonction de Green sur une boule

Proposition 23 *La fonction de Green sur la boule $B(0,R)$ est donnée par*

(i) Pour $n \geq 3$

$$G(x,y) = \frac{1}{(2-N)\sigma_N}\left[|x-y|^{2-N} - \left|R\frac{x}{|x|} - \frac{|x|}{R}y\right|^{2-N}\right] ;$$

(ii) Pour $N = 2$

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\log|x-y| - \log\left|R\frac{x}{|x|} - \frac{|x|}{R}y\right|\right] .$$

et sa dérivée normale est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_N R|x-y|^N}$$

pour tout $x \in B(0,R)$ et $y \in \partial B(0,R)$.

Preuve. Fixons $x \neq 0$ avec $|x| < R$. Soit $X = \frac{R^2}{|x|^2}x$. X et x sont reflexive l'un par rapport à l'autre vis à vis de la sphère $\partial B(0,R)$. Noter aussi que la transformation $x \longmapsto X$ est conforme (preserve les angles). Si $|y| = R$, alors par les triangles similaires on a pour tout $y \in \partial B(0,R)$

$$\frac{|x|}{R} = \frac{R}{|X|} = \frac{|y-x|}{|y-X|} \tag{6.2}$$

ce qui implique que

$$|y-x| = \frac{|x|}{R}|y-X| = \left| R\frac{x}{|x|} - \frac{|x|}{R}y \right|.$$

Ainsi, en vue d'obtenir zéro comme valeur au bord, on prend pour $N \geq 3$

$$G(x,y) = \frac{1}{(2-N)\sigma_N}\left[|x-y|^{2-N} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{N-2} \frac{1}{|y-X|^{N-2}} \right].$$

Le cas $N = 2$ est similaire.
Pour la dérivée normale, on a pour $x \in B(0,R)$ et $y \in \partial B(0,R)$

$$G(x,y) = \frac{1}{(2-N)\sigma_N}\left[|x-y|^{2-N} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \frac{1}{|y-X|^{N-2}} \right]$$

alors, par (6.2), on a

$$D_{y_i}G(x,y) = -\frac{1}{\sigma_N}\left[\frac{x_i - y_i}{|x-y|^N} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{N-2} \frac{X_i - y_i}{|y-X|^N} \right] = \frac{y_i}{R^2\sigma_N}\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^N}.$$

En prenant $n_i = \frac{y_i}{R}$ avec $|y| = R$

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = \sum_{1 \leq i \leq N} n_i D_{y_i} G(x,y) = \frac{1}{R\sigma_N}\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^N}.$$

□

Remarque 31 *La fonction*

$$K(x,y) := \frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_N R |x-y|^N}$$

*dite **noyau de Poisson** vérifie les propriétés suivantes:*

(i) $K(x,y)$ *est régulière pour* $x \neq y$*;*

(ii) $K(x,y) > 0$ *pour* $|x| < R$*;*

(iii) $\int_{|y|=R} K(x,y)\, d\sigma(y) = 1$ *pour tout* $|x| < R$.

Théorème 31 Formule intégrale de Poisson. *Pour tout* $\varphi \in C(\partial B(0,R))$*, la fonction u définie par*

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial B(0,R)} K(x,y)\varphi(y)\, d\sigma(y) & |x| < R \\ \varphi(x) & |x| = R \end{cases}$$

vérifie $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ *et*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}.$$

Remarque 32 *Dans la formule intégrale de Poisson, en remplaçant* x *par* 0*, on obtient*

$$u(0) = \frac{1}{\sigma_N R^{N-1}} \int_{\partial B(0,R)} \varphi(y)\, d\sigma(y)$$

qui n'est autre que la propriété de la valeur moyenne.

Lemme 11 ***Inégalité de Harnack.*** *Supposons que* u *est harmonique dans* $B(x_0,R)$ *et* $u \geq 0$*. Alors*

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{N-2} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{N-2} \frac{R+r}{R-r} u(x_0)$$

où $r = |x - x_0| < R$.

Preuve. On prend $x_0 = 0$ et $u \in C(\overline{B(0,R)})$. Par la formule de Poisson on a

$$u(x) = \frac{1}{R\sigma_N} \int_{\partial B(0,R)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^N} u(y)\, d\sigma(y).$$

Comme $R - |x| \leq |y - x| \leq R + |x|$ pour $|y| = R$, on a

$$\frac{1}{R\sigma_N} \frac{R-|x|}{R+|x|} \frac{1}{(R+|x|)^{N-2}} \int_{\partial B(0,R)} u(y)\, d\sigma(y) \leq$$

$$u(x) \leq \frac{1}{R\sigma_N} \frac{R+|x|}{R-|x|} \frac{1}{(R-|x|)^{N-2}} \int_{\partial B(0,R)} u(y)\, d\sigma(y).$$

Par la propriété de la valeur moyenne on a

$$u(0) = \frac{1}{R^{N-1}\sigma_N} \int_{\partial B(0,R)} u(y)\, d\sigma(y)$$

$\square$

Corollaire 11 *Toute fonction harmonique dans* $\mathbb{R}^N$ *majorée ou minorée est constante.*

Preuve. Supposons $u \geq 0$ dans $\mathbb{R}^N$. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ et en appliquant le lemme précédent sur une boule $B(0,R)$, avec $R > |x|$, on obtient

$$\left[\frac{R}{R+|x|}\right]^{N-2} \frac{R-|x|}{R+|x|} u(0) \leq u(x) \leq \left[\frac{R}{R-|x|}\right]^{N-2} \frac{R+|x|}{R-|x|} u(0)$$

ce qui implique que $u(x) = u(0)$ en faisant tendre $R \to \infty$. □

Théorème 32 *Supposons que u est harmonique dans $B(0,R)$ dans $B(0,R)\backslash\{0\}$ satisfaisant*

$$u(x) := \begin{cases} o(\log(|x|)), & N = 2 \\ o(|x|^{2-N}) & n \geq 3 \end{cases} \quad \textit{lorsque } x \to 0.$$

Alors u est prolongeable en une fonction C^2 et est harmonique dans $B(0,R)$.

Preuve. Supposons u est continue dans $\overline{B(0,R)}\backslash\{0\}$ et soit v la solution de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } B(0,R) \\ v = u & \text{dans } \partial B(0,R), \end{cases}$$

et montrons que $v = u$ dans $B(0,R)\backslash\{0\}$. Soient $w := v - u$ dans $B(0,R)\backslash\{0\}$ et $M_r := \max_{\partial B(0,r)} |w|$. On prend $N \geq 3$. Il est clair que

$$|w(x)| \leq M_r \frac{r^{N-2}}{|x|^{N-2}} \qquad \text{on } \partial B(0,r).$$

Comme w et $\frac{1}{|x|^{N-2}}$ sont harmoniques dans $B(0,R)\backslash B(0,r)$. Alors le principe de maximum implique

$$|w(x)| \leq M_r \frac{r^{N-2}}{|x|^{N-2}} \qquad \text{dans } B(0,R)\backslash B(0,r).$$

où $M_r = \max_{\partial B(0,r)} |v-u| \leq \max_{\partial B(0,r)} |v| \max_{\partial B(0,r)} |u| \leq M + \max_{\partial B(0,r)} |u|$ avec $M = \max_{\partial B(0,R)} |v|$. Ainsi, pour tout $x \neq 0$, on a

$$|w(x)| \leq \frac{r^{N-1}}{|x|^{N-2}} M + \frac{1}{|x|^{N-2}} r^{N-2} \max_{\partial B(0,r)} |u| \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } r \to 0.$$

□

6.4 Théorème d'injection de Sobolev

Théorème 33

$$H^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & \textit{pour } p < N, \\ C^0(\overline{\Omega}) & \textit{pour } p > N. \end{cases}$$

De plus, pour $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)} && \textit{pour } p < N, \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}}\|Du\|_{L^p(\Omega)} && \textit{pour } p > N. \end{aligned}$$

6.5 Régularité

6.5.1 Régularité intérieure

Théorème 34 ***Régularité*** $\mathbf{H^2}$ ***intérieure***
Supposons que $a_{i,j} \in C^1(\Omega)$, $b_i,c \in L^\infty(\Omega)$, $1 \le i,j \le N$ *et* $f \in L^2(\Omega)$. *Alors la solution faible* $u \in H^1(\Omega)$ *de l'équation (5.14) vérifie* $u \in H^2_{loc}(\Omega)$*; et pour tout ouvert relativement compact* V *dans* Ω *on a*

$$\|u\|_{H^2(V)} \le C\left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)},\right] \tag{6.3}$$

où la constante C *dépend seulement de* Ω,V *et les coefficients de* L.

Preuve. Soient $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$ et $\xi \in \mathcal{D}(W,\mathbb{R}^N)$ avec $\xi = 1$ sur V, $0 \le \xi \le 1$. Comme u est solution faible de (5.14) on a $B(u,v) = (f,v)$ pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$. Alors

$$\sum_{i,j}\int_\Omega a_{i,j}D_iuD_jv\,dx = \int_\Omega \tilde f v\,dx, \tag{6.4}$$

où

$$\tilde f := f - \sum_i b_iD_iu - cu.$$

Soit maintenant $|h| \neq 0$, $k \in \{1,\cdots,N\}$ et remplacer $v := -d_k^{-h}[\xi^2 d_k^h u]$ dans (6.4), alors on obtient (en utilisant $d_k^h(uv) = u_hd_k^hv + vd_k^hu$ et avec la notation $a_{i,j,h}(x) = a_{i,j}(x+h)$)

$$\begin{aligned}
A := \sum_{i,j}\int_\Omega a_{i,j}D_iuD_jv\,dx &= -\sum_{i,j}\int_\Omega a_{i,j}D_iuD_j\left[d_k^{-h}(\xi^2d_k^hu)\right]\,dx\\
&= \sum_{i,j}\int_\Omega d_k^h[a_{i,j}D_iu]D_j\left[(\xi^2d_k^hu)\right]\,dx\\
&= \sum_{i,j}\int_\Omega \left[a_{i,j,h}d_k^h[D_iu] + [d_k^ha_{i,j}]D_iu\right]D_j\left[(\xi^2d_k^hu)\right]\,dx\\
&= \sum_{i,j}\int_\Omega a_{i,j,h}d_k^h(D_iu)d_k^h(D_ju)\xi^2\,dx\\
&\quad + \sum_{i,j}\int_\Omega [a_{i,j,h}d_k^hD_iud_k^hu2\xi D_j\xi + d_k^h(a_{i,j})D_iud_k^h(D_ju)\xi^2\\
&\qquad + d_k^h(a_{i,j})D_iud_k^h(u)2\xi D_j\xi]\,dx\\
&=: A_1 + A_2 = B := \int_\Omega \tilde f v\,dx.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Par l'ellipticité uniforme on a

$$A_1 \ge \mu\int_\Omega \xi^2|d_k^hDu|^2\,dx. \tag{6.6}$$

D'autre part, par la régularité des coefficients on a

$$|A_2| \leq C \int_\Omega \xi |d_k^h Du|\,|d_k^h u| + \xi |d_k^h Du|\,|Du| + \xi |d_k^h u|\,|Du|,$$

pour une certaine constante $C > 0$. Par l'inégalité de Cauchy $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$ on obtient

$$|A_2| \leq \frac{\mu}{2} \int_\Omega \xi^2 |d_k^h Du|^2\,dx + C \int_\Omega |Du|^2,$$

où l'on a utilisé l'inégalité $\int_W |d_k^h u|^2\,dx \leq C \int_\Omega |Du|^2\,dx$. Ainsi on obtient

$$A \geq \frac{\mu}{2} \int_\Omega \xi^2 |d_k^h Du|^2\,dx - C \int_\Omega |Du|^2\,dx. \tag{6.7}$$

On considère maintenant l'autre membre

$$B := \int_\Omega \tilde{f} v\,dx,$$

on a

$$|B| \leq C \int_\Omega [|f| + |Du| + |u|]\,|v|\,dx. \tag{6.8}$$

En utilisant l'inégalité $\|d^h u\|_{L^p(V)} \leq C \|Du\|_{L^p(V)}$ for $|h| < dist(V,\partial U)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v|^2\,dx &\leq C \int_\Omega |D(\xi^2 d_k^h u)|^2\,dx \\ &\leq C \int_\Omega \left[|d_k^h u|^2 + \xi^2 |D(d_k^h u)|^2 \right] dx \\ &\leq C \int_\Omega \left[|Du|^2 + \xi^2 |D(d_k^h u)|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

L'inégalité (6.8) avec l'inégalité de Cauchy donne

$$|B| \leq \varepsilon \int_\Omega \xi^2 |d_k^h Du|^2\,dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_\Omega [f^2 + u^2]\,dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_\Omega |Du|^2\,dx.$$

Pour $\varepsilon = \frac{\mu}{4}$ on obtient

$$|B| \leq \frac{\mu}{4} \int_\Omega \xi^2 |d_k^h Du|^2\,dx + C \int_\Omega \left[f^2 + u^2 + |Du|^2 \right] dx. \tag{6.9}$$

En combinant (6.5), (6.7) et (6.9) on obtient

$$\int_V |d_k^h Du|^2\,dx \leq \int_\Omega \xi^2 |d_k^h Du|^2\,dx \leq C \int_\Omega \left[f^2 + u^2 + |Du|^2 \right] dx$$

pour $k \in \{1, \cdots, N\}$ et $|h| \neq 0$ petit. Ainsi (voir Théorème 22) $Du \in H^1_{loc}(\Omega)$ et donc $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ avec

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right]. \tag{6.10}$$

l'équation (6.10) donne

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left[\|f\|_{L^2(W)} + \|u\|_{H^1(W)}\right], \tag{6.11}$$

où la constante C dépend de V, W, etc. On choisit une nouvelle fonction plateau $\xi = 1$ sur W avec support dans Ω, $1 \leq \xi \leq 1$. Posons $v := \xi^2 u$ dans l'égalité (6.4), on obtient

$$\int_\Omega \xi^2 |Du|^2 \, dx \leq C \int_\Omega [f^2 + u^2] \, dx.$$

D'où

$$\|u\|_{H^1(W)} \leq C[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}].$$

Cette inégalité et l'inégalité (6.11) donne le résultat. $\square$

6.5.2 Régularité au bord

Théorème 35 ***Régularité* $\mathbf{H^2}$ *au bord***
Supposons que $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b_i,c \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leq i,j \leq N$, $f \in L^2(\Omega)$ et que $\partial\Omega$ est de classe C^2. Alors toute solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème

$$\begin{cases} Lu = f & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.12}$$

vérifie $u \in H^2(\Omega)$; et on a

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)},\right] \tag{6.13}$$

où la constante C dépend seulement de Ω et les coefficients de L.

Bibliographie

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris (1983).

[2] L.C. Evans, *Partial differential equations*, AMS, GSM 19 (1998).

[3] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equation of the second order*, Springer-Verlag, Berlin (1983).

[4] F. Hirsch and G. Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*, Masson (1997).

[5] M. Jazar, *Théorie spectrale*, Cours de DEA de l'Université Libanaise, Beyrouth 2005.

[6] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non-homogènes.* Tome 1. Editions Dunod (1968).

[7] M. Renardy and R.C. Rogers, *An introduction to partial differential equations*, Springer-Verlag, TAM 13 (1993).

[8] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1974.