

# Changement de probabilité - Théorème de Girsanov

Généralités

La formule de Cameron-Martin

Les deux théorèmes de Girsanov

Théorème de représentation prévisible

Applications

Théorème fondamental de la finance: Probabilité risque neutre

# 1 Généralités

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé et  $Z$  une v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurable positive d'espérance 1. On définit une nouvelle probabilité  $Q$  sur  $\mathcal{F}$  par  $Q(A) = E(Z\mathbb{1}_A)$ . On a, pour toute v.a.  $Q$  intégrable  $E_Q(X) = E_P(ZX)$ .

Si l'espace de probabilité est muni d'une filtration, et si  $Z_T$  est une v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable positive d'espérance 1, on définit  $Q$  sur  $\mathcal{F}_T$  par  $Q(A) = E(Z_T \mathbb{1}_A)$ . La probabilité  $Q$  est équivalente à  $P$  sur  $\mathcal{F}_T$  si la v.a.  $Z_T$  est strictement positive. Enfin, pour tout  $t < T$  et tout  $A \in \mathcal{F}_t$  on a

$$Q_T[A] = E[E_P[Z_T | \mathcal{F}_t] \mathbb{1}_A] = E_P[Z_t \mathbb{1}_A],$$

en posant  $Z_t = E_P[Z_T | \mathcal{F}_t]$  et

$$dQ|_{\mathcal{F}_t} = Z_t dP|_{\mathcal{F}_t}.$$

**Lemme 1.1** *Un processus  $\{M_t, t \geq 0\}$  est une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale sous  $Q$  si et seulement si le processus  $(Z_t M_t, t \geq 0)$  est une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale sous  $P$ .*

## 2 La formule de Cameron-Martin

### 2.1 Dimension finie

Soient  $(X_1, \dots, X_n)$  des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

$$E \left[ \exp \sum_{i=1}^n \mu_i X_i \right] = \prod_{i=1}^n E [\exp [\mu_i X_i]] = \exp \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right],$$

ce qui entraîne que

$$E \left[ \exp \sum_{i=1}^n \left( \mu_i X_i - \frac{\mu_i^2}{2} \right) \right] = 1.$$

On définit une nouvelle probabilité  $Q$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  en posant

$$Z(\omega) = \exp \sum_{i=1}^n \left( \mu_i X_i(\omega) - \frac{\mu_i^2}{2} \right)$$

et  $Q(d\omega) = Z(\omega)P(d\omega)$ , autrement dit, pour tout  $A \in \mathcal{F}$

$$Q[A] = E_P[Z\mathbb{1}_A] = \int_A Z(\omega)P(d\omega)$$

La mesure  $Q$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  équivalente à  $P$ .

$$\begin{aligned} Q(X_1 \in dx_1, \dots, X_n \in dx_n) &= e^{\sum_{i=1}^n (\mu_i x_i - \mu_i^2/2)} P(X_1 \in dx_1, \dots, X_n \in dx_n) \\ &= (2\pi)^{-n/2} e^{\sum_{i=1}^n (\mu_i x_i - \mu_i^2/2)} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2}} dx_1 \cdots dx_n \\ &= (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i)^2} dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

et l'on en déduit que sous  $Q$ ,

$$(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\mu, \text{Id}),$$

où  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ .

## 2.2 Cas Brownien

Soit  $\{W_t, t \geq 0\}$  un MB et  $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$  sa filtration naturelle complétée.

Pour tout  $m \in \mathbb{R}$ , le processus

$$t \mapsto Z_t^m = \exp \left[ mW_t - \frac{m^2 t}{2} \right]$$

est une  $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingale positive.

On fixe alors un horizon  $T > 0$ . La mesure  $Q_T^m$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$  par

$$Q_T^m [A] = E_P [Z_T^m \mathbb{1}_A]$$

est une probabilité équivalente à  $P$  sur  $\mathcal{F}_T^W$ .

**Théorème 2.1** [Formule de Cameron-Martin] *Sous la mesure  $Q_T^m$ , le processus*

$$\tilde{W} : t \mapsto W_t - mt, \quad t \leq T$$

*est un mouvement brownien.*

### 3 Les deux théorèmes de Girsanov

Soit  $\{W_t, t \geq 0\}$  un MB sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , et  $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$  sa filtration naturelle complétée. Soit  $\{\theta_t, t \geq 0\}$  un bon processus local vérifiant la condition de Novikov. Par les résultats du chapitre précédent, on sait que l'unique solution de l'EDS

$$Z_t^\theta = 1 + \int_0^t \theta_s Z_s^\theta dW_s$$

s'écrit

$$Z_t^\theta = \exp \left[ \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right]$$

et que  $Z^\theta$  est une  $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingale. On définit la mesure

$$Q_T^\theta(d\omega) = Z_T(\omega)P(d\omega)$$

sur  $(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$ , qui est une probabilité équivalente à  $P$  sur  $\mathcal{F}_T^W$ .

**Théorème 3.1** [Théorème de Girsanov] *Sous la mesure  $Q_T^\theta$ , le processus*

$$\widetilde{W} : t \mapsto W_t - \int_0^t \theta_s ds, \quad t \leq T$$

*est un mouvement brownien.*

**Théorème 3.2 [Théorème de Girsanov abstrait]** *Soit  $P$  et  $Q$  deux mesures de probabilité équivalentes sur un espace filtré  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t, t \leq T\})$ . On suppose que toutes les  $(\mathcal{F}_t)$ -martingales sont continues. Alors sous  $P$  il existe  $L$  une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale continue telle que pour tout  $t \leq T$  et tout  $A \in \mathcal{F}_t$ ,*

$$Q[A] = E_P[\exp[L_t - \langle L \rangle_t/2] \mathbb{1}_A].$$

*De plus, si  $M$  une martingale locale continue sous  $P$ , alors le processus*

$$\tilde{M} : t \mapsto M_t - \langle M, L \rangle_t$$

*est une martingale locale continue sous  $Q$ .*

Expliquons d'abord la première partie de ce théorème concernant l'existence de la martingale  $L$ . Elle repose sur le théorème de Radon-Nikodym, qui assure l'existence d'un processus densité  $\{D_t, t \geq 0\}$  de  $P$  par rapport à  $Q$ , au sens où pour tout  $t \leq T$  et tout  $A \in \mathcal{F}_t$ ,

$$Q[A] = E_P[D_t \mathbb{1}_A].$$

Comme  $A \in \mathcal{F}_T$ , on a aussi

$$Q[A] = E_P[D_T \mathbb{1}_A] = E_P[E_P[D_T | \mathcal{F}_t] \mathbb{1}_A]$$

de sorte, par identification, que

$$D_t = E_P[D_T | \mathcal{F}_t]$$

pour tout  $t \leq T$ . On en déduit que  $D$  est une martingale UI continue sous  $P$ . De plus elle est strictement positive, par équivalence entre  $P$  et  $Q$ . On peut alors (on peut effectivement définir une intégrale stochastique par

rapport à une martingale continue) définir le processus

$$L_t = \log D_0 + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s}$$

et on applique la formule d'Itô à

$$\begin{aligned} R_t = \exp [L_t - \langle L \rangle_t / 2] &= D_0 + \int_0^t R_s dL_s - \frac{1}{2} \int_0^t R_s d\langle L \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t R_s d\langle L \rangle_s \\ &= D_0 + \int_0^t R_s dL_s. \end{aligned}$$

Mais par définition de  $L$ , on a aussi

$$D_t = D_0 + \int_0^t D_s dL_s,$$

de sorte que  $D$  et  $R$  sont solutions fortes de la *même* EDS. Par unicité, on en déduit que  $R \equiv D$ , d'où

$$D_t = \exp [L_t - \langle L \rangle_t / 2].$$

Ceci entraîne finalement que pour tout  $t \leq T$  et tout  $A \in \mathcal{F}_t$ ,

$$Q[A] = E_P[\exp[L_t - \langle L \rangle_t/2] \mathbb{1}_A].$$

△

On voit enfin facilement comment le théorème 3.2 entraîne le théorème 3.1.

La martingale  $L$  du théorème 3.2 est ici

$$L_t = \int_0^t \theta_s dB_s$$

et on a donc

$$\langle B, L \rangle_t = \int_0^t \theta_s ds.$$

Comme  $B$  est une martingale locale continue sous  $P$ ,  $\tilde{B}$  est une martingale locale continue sous  $Q_T^\theta$ . On démontre comme ci-dessus que son crochet est  $\langle \tilde{B} \rangle_t = t$ , et l'on en déduit que  $\tilde{B}$  est un mouvement brownien sous  $Q_T^\theta$ .

△

# 4 Théorème de représentation prévisible

Soit  $B$  un mouvement brownien et  $\mathbf{F}$  sa filtration naturelle, soit  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ .

## 4.1 Représentation prévisible

**Théorème 4.1** *Soit  $B$  un mouvement Brownien et  $(\mathcal{F}_t)$  sa filtration naturelle. Soit  $M$  une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale, telle que  $\sup_{t \leq T} E[M_t^2] < \infty$ . Il existe un unique processus prévisible  $H$  vérifiant  $E(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty$ , tel que*

$$\forall t \in [0, T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s .$$

*Si  $M$  est une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale locale, il existe un unique processus prévisible  $H$  tel que*

$$\forall t \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$$

Ce résultat est important en finance pour exhiber un portefeuille de couverture.

**Corollaire 4.2** *Toutes les  $(\mathcal{F}_t^B)$ -martingales locales sont continues.*

# 5 Applications

## 5.1 Calcul d'espérances

### 5.1.1 Calcul de

$$E \left[ B_t \exp \left[ \int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds \right] \right]$$

pour  $t < T$  et  $\theta$  fonction déterministe. On effectue un changement de probabilité

$$L_t = \exp \left[ \int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right]$$

et on calcule

$$\begin{aligned} E_P [B_t L_T] &= E_P [B_t L_t] = E_Q [B_t] = E_Q \left[ \tilde{B}_t + \int_0^t \theta_s ds \right] \\ &= E_Q \left[ \int_0^t \theta_s ds \right] = \int_0^t \theta_s ds. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$E \left[ B_t \exp \left[ \int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds \right] \right] = \int_0^t \theta_s ds$$

### 5.1.2 Calcul de

$$I = E \left[ \exp - \left[ \alpha B_t^2 + \frac{\beta^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds \right] \right]$$

où  $B$  est un brownien issu de  $a$ . On pose  $x = a^2$  et on effectue un changement de probabilité  $P \rightarrow P^\beta$  avec densité sur  $\mathcal{F}_t^W$

$$\frac{dP^\beta}{dP} = L_t^\beta =; \exp \left[ -\beta \int_0^t B_s dB_s - \frac{\beta^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds \right].$$

En utilisant la formule d'intégration par parties,

$$L_t^\beta = \exp - \left[ \frac{\beta}{2} (B_t^2 - x - t) + \frac{\beta^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds \right]$$

Sous  $P^\beta$ ,

$$B_t = a + W_t - \beta \int_0^t B_s ds$$

avec  $W$   $P^\beta$ -Brownien. Donc  $B$  est un **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** sous  $P^\beta$ , et  $B_t$  une v.a. gaussienne d'espérance  $ae^{-\beta t}$  et de variance  $\frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})$ . On en déduit que

$$I = E^\beta \left[ L_t^{-1} \exp - \left[ \alpha B_t^2 + \frac{\beta^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds \right] \right] = E^\beta \left[ \exp \left[ -\alpha B_t^2 + \frac{\beta}{2} (B_t^2 - x - t) \right] \right].$$

Après quelques calculs simples et longs, on obtient

$$I = (\cosh \beta t + 2\alpha \sinh \beta t / \beta)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{x\beta(1 + 2\alpha \coth \beta t / \beta)}{2(\coth \beta t + 2\alpha / \beta)} \right].$$

En faisant  $a = \alpha = 0$  et  $\beta = \sqrt{2\lambda}$ , cette formule donne la transformée de Laplace de la norme  $L^2$  du Brownien :

$$E \left[ \exp -\lambda \int_0^t B_s^2 ds \right] = \left( \cosh \sqrt{2\lambda} t \right)^{-1/2}.$$

## 5.2 Temps de passage du Brownien drifté

On considère  $W$  un mouvement Brownien standard issu de 0 et

$$T_b^\mu = \inf \{t > 0, W_t + \mu t = b\},$$

**premier temps de passage au seuil  $b$**  du Brownien drifté

$W^\mu : t \mapsto W_t + \mu t$ , pour  $\mu \in \mathbb{R}$ . On définit

$$P^\mu(d\omega) = \exp[\mu W_t - \mu^2 t/2] P(d\omega)$$

sur  $\mathcal{F}_t^W$ .

Ceci permet de calculer la densité de  $T_b^\mu$  en écrivant

$$\begin{aligned}
P [T_b^\mu \leq t] &= P^\mu [T_b \leq t] = E [\exp [\mu W_t - \mu^2 t/2] \mathbb{1}_{\{T_b \leq t\}}] \\
&= E [\exp [\mu W_{T_b \wedge t} - \mu^2 (T_b \wedge t)/2] \mathbb{1}_{\{T_b \leq t\}}] \\
&= E [\exp [\mu W_{T_b} - \mu^2 T_b/2] \mathbb{1}_{\{T_b \leq t\}}] \\
&= e^{\mu b} E [\exp - [\mu^2 T_b/2] \mathbb{1}_{\{T_b \leq t\}}] \\
&= e^{\mu b} \int_0^t e^{-\mu^2 s/2} \left( \frac{|b| e^{-b^2/2s}}{\sqrt{2\pi s^3}} \right) ds \\
&= \int_0^t \frac{|b|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp - \left[ \frac{(b - \mu s)^2}{2s} \right] ds,
\end{aligned}$$

Ceci entraîne par dérivation que

$$P [T_b^\mu \in dt] = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp - \left[ \frac{(b - \mu t)^2}{2t} \right] dt.$$

Enfin, soit par calcul direct avec la densité, soit en utilisant une nouvelle fois la formule de Cameron-Martin, on peut calculer la transformée de Laplace de  $T_b^\mu$  :

$$E [\exp -\lambda T_b^\mu] = \exp \left[ \mu b - |b| \sqrt{\mu^2 + 2\lambda} \right] .$$

# 6 Théorème fondamental de la finance: Probabilité risque neutre

Une **opportunité d'arbitrage** est une stratégie d'investissement qui permet, à partir d'une mise de fonds initiale nulle, d'obtenir une richesse terminale positive, non nulle.

Dans le cas d'un marché où sont négociés **un actif sans risque**, c'est-à-dire d'un actif dont le prix suit la dynamique

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt$$

et un actif risqué de dynamique

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dB_t)$$

Une **stratégie (ou portefeuille)** d'investissement est un couple  $(\pi^0, \pi)$  de processus adaptés. La **richesse** associée est  $X_t = \pi_t^0 S_t^0 + \pi_t S_t$ . La stratégie est dite **auto-finançante** si  $dX_t = \pi_t^0 dS_t^0 + \pi_t dS_t$ . Il en résulte que

$$dX_t = rX_t dt + \pi_t (dS_t - rS_t dt).$$

Dans un modèle de prix d'actifs financiers, on doit veiller à ce que le modèle ne présente pas d'opportunités d'arbitrage. Dans un marché comportant un actif sans risque, c'est-à-dire d'un actif dont le prix suit la dynamique

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt$$

**le théorème fondamental montre que le marché est sans arbitrage si et seulement si il existe une probabilité  $Q$  équivalente à la probabilité historique** -celle sous laquelle on écrit les dynamiques des prix- telle que les processus des prix actualisés (soit  $S_t^i/S_t^0$ ) sont des martingales. Cette probabilité est qualifiée **de risque-neutre**.

Si elle est unique, la valeur d'un actif financier  $H$ , payé à la date  $T$ , est calculée comme **l'espérance sous la probabilité risque neutre du payoff actualisé**, soit  $V_t = E_Q(HR_T|\mathcal{F}_t)$ , où  $R_T = \int_0^T r_s ds$ . On parle alors de **marché complet**. Si la probabilité risque neutre n'est pas unique, on parle de marché incomplet.

## 6.1 Changement de numéraire

Il est parfois très utile d'exprimer les prix en valeur relative par rapport à un autre processus de prix.

**Définition 6.1** *Un **numéraire** est un actif financier de prix strictement positif.*

Si  $M$  est un numéraire, on peut évaluer la valeur  $V_t$  d'une stratégie en terme de ce numéraire, soit  $V_t/M_t$ .

**Proposition 6.2** *Supposons qu'il y a  $d$  actifs risqués dans le marché, dont les prix  $(S_t^{(i)}; i = 1, \dots, d, t \geq 0)$  sont des processus d'Itô, et tels que  $S^{(1)}$  est strictement positif. Soit  $V_t = \sum_{i=1}^d \pi_t^i S_t^{(i)}$  la valeur du portefeuille  $\pi_t = (\pi_t^i, i = 1, \dots, d)$ . Si  $(\pi_t, t \geq 0)$  est auto-financiant, i.e. si  $dV_t = \sum_{i=1}^d \pi_t^i dS_t^{(i)}$ , et si l'on choisit  $S_t^{(1)}$  comme numéraire, alors*

$$dV_t^1 = \sum_{i=2}^d \pi_t^i dS_t^{(i,1)}$$

où  $V_t^1 = V_t/S_t^{(1)}$ ,  $S_t^{(i,1)} = S_t^{(i)}/S_t^{(1)}$ .

On associe à un numéraire  $M$  le changement de probabilité suivant: Soit  $Q$  la probabilité risque neutre, telle que le processus  $(M_t R_t, t \geq 0)$  est une  $Q$ -martingale. Soit  $Q^M$  défini par  $Q^M|_{\mathcal{F}_t} = (M_t R_t)Q|_{\mathcal{F}_t}$ .

**Proposition 6.3** *Soit  $(X_t, t \geq 0)$  le prix d'un actif financier et  $M$  un numéraire. Le prix de  $X$ , dans le numéraire  $M$ , soit  $(X_t/M_t, 0 \leq t \leq T)$  est une  $Q^M$ -martingale.*

Le calcul du terme  $E_Q(S_T e^{-rT} \mathbb{1}_{S_T \geq a})$  qui apparait dans la formule de Black et Scholes est immédiat: il suffit d'utiliser que, sous  $Q$  le processus  $M_t = S_t e^{-rt} / S_0$  est une martingale strictement positive d'espérance 1, et de poser  $d\hat{Q} = M_t dQ$

$$\begin{aligned} E_Q(S_T e^{-rT} \mathbb{1}_{S_T \geq a}) &= E_{\hat{Q}}(S_0 \mathbb{1}_{S_T \geq a}) \\ &= S_0 \hat{Q}(S_T \geq a). \end{aligned}$$

Il reste à exprimer la dynamique de  $S$  sous  $\hat{Q}$ .

Un changement de numéraire est également très efficace pour calculer le prix d'une **option d'échange**, qui est

$$E((S_T^1 - S_T^2)^+)$$

## 6.2 Probabilité forward-neutre

La valeur à la date  $t$  d'un flux déterministe  $F$  reçu à la date  $T$  est

$$FP(t, T) = F E_Q[\exp - \int_t^T r(u) du | \mathcal{F}_t].$$

Si ce flux est aléatoire, la valeur à la date  $t$  de ce flux est

$$E_Q[F \exp - \int_t^T r(u) du | \mathcal{F}_t].$$

Par hypothèse A.O.A, le processus  $R(t)P(t, T)$  est une  $Q$ -martingale, son espérance est constante, égale à  $P(0, T)$ . Pour tout  $T$ , le processus

$$\zeta_t^T := \frac{R(t)P(t, T)}{P(0, T)}$$

est une  $Q$ -martingale positive d'espérance 1.

Soit  $Q_T$  la mesure de probabilité définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$  par

$$Q_T(A) = E_Q(\zeta_t^T 1_A)$$

pour tout  $A \in \mathcal{F}_t$ . Lorsque  $T$  est fixé, on notera  $\zeta_t = \zeta_t^T$ .

**Définition 6.4** La probabilité  $Q_T$  définie sur  $\mathcal{F}_T$ , par  $\frac{dQ_T}{dQ} = \zeta_t^T$  est appelée **probabilité forward-neutre** de maturité  $T$ .

Avec cette notation

$$E_{Q_T}(F | \mathcal{F}_t) = E_Q\left(F \frac{\zeta_T}{\zeta_t} | \mathcal{F}_t\right).$$

Lorsque  $r$  est déterministe,  $Q_T = Q$ .

La mesure  $Q_T$  est la martingale mesure associée au choix du zéro-coupon de maturité  $T$  comme numéraire.